

любой неизменяемой ферме без лишних стержней, принадлежит Максвеллу¹⁾, который, впрочем, пользовался не нулевой системой, а полярностью относительно параболоида вращения с осью, перпендикулярной к ортографической плоскости. Теория взаимных диаграмм Максвелла строится аналогично теории, указанной в предыдущих пунктах; при этом, однако, имеется то неудобство, что плоские диаграммы, к которым приходят таким путем, хотя и взаимны в смысле п. 26, но не обладают свойством параллельности между соответствующими сторонами. Стороны, соответствующие друг другу на обеих диаграммах в силу полярности относительно параболоида, будут взаимно перпендикулярными. Если мы примем во внимание, что главной целью этих способов является определение усилий, направление которых уже установлено стержнями фермы, так что для каждого из них требуется определить лишь величину и сторону действия, то станет очевидным, что ориентация диаграммы „б“ относительно диаграммы „а“ не имеет существенного значения. Но несомненно более наглядную связь между двумя диаграммами дает диаграмма „б“ с той ориентацией, к которой мы приходим прямым методом (п. 26).

Что этого можно достичь путем обращения к нулевой системе, впервые было доказано Кремона²⁾ в его мемуаре „*Le figure reciproche nella Statica grafica*“³⁾.

§ 7. Гибкие и нерастяжимые нити

34. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОСТУЛАТ. Рассуждения, подобные тем, которые были применены в § 2 к односвязным стержневым системам, позволяют рассмотреть задачу о равновесии *гибкой и нерастяжимой нити*. Под этим названием подразумевается всякая материальная система одного измерения (см. гл. X, п. 5), обладающая следующими свойствами:

а) под действием подходящих сил система может расположиться по любой геометрической линии;

¹⁾ Collected Papers, т. 1, стр. 514—525, т. 2, стр. 161—207.

²⁾ Луиджи Кремона родился в Павии в 1830 г., умер в Риме в 1903 г. Преподавал последовательно в университете в Болонье, в Высшем техническом институте Милана и с 1873 г. до конца жизни в университете в Риме, руководя одновременно там же Школой инженеров. Из многочисленных научных трудов Кремона, которые, кроме мемуара, приведенного в тексте, выходят из области механики, здесь достаточно упомянуть открытые бирациональных преобразований, связанных с его именем.

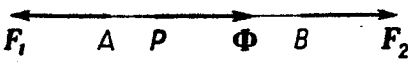
³⁾ Милан, 1872. См. также: *Opere matematiche*, т. III, стр. 336—366. Более обширные и систематические приложения этого метода можно найти у С. Saviotti, *La Statica grafica*, т. III, Милан, 1878; L. Henneberg, *Die graphische Statik der starren Systeme*, Лейпциг, 1911; M. Levy, *La Statique graphique*, ч. I, изд. 3, Париж, 1907. [См. также В. Л. Кирпичев, *Основания графической статики*, 1923. (*Прим. ред.*)]

б) дуга между какими-либо двумя точками системы сохраняет во всякой возможной ее конфигурации одну и ту же длину.

Примем в качестве постулата следующий физически непосредственно очевидный статический принцип: *для равновесия гибкой и нерастяжимой нити AB , находящейся под действием двух сил F_1, F_2 , приложенных к ее концам, необходимо и достаточно, чтобы нить была прямолинейна и силы были растягивающими, равными по величине и направленными в противоположные стороны.*

Для краткости в изложении этой главы, говоря о нитях, мы будем всегда подразумевать, что они гибки и нерастяжимы, т. е. обладают только что указанными свойствами „а“, „б“.

35. Натяжение. Из постулата предыдущего пункта можно вывести важное следствие. Выбрав какую-нибудь точку P нити между концами A и B (фиг. 62), применим к одной из двух частей нити, например, к AP , основные условия равновесия. Так как внешние силы (относительно AP) сводятся к двум: к силе F_1 , приложенной



Фиг. 62.

в точке A , и к неизвестному усилию Φ , которое испытывает точка P со стороны смежного с нею элемента части PB нити, то мы видим, что усилие Φ должно быть прямо противоположно силе F_1 , т. е. равно F_2 . Таким образом, усилие Φ всегда направлено так, что оно растягивает часть AP нити, т. е. от P к B ; поэтому его называют натяжением. Натяжение одно и то же для всех точек P нити.

Совмещая, в частности, P с A , мы увидим, что A испытывает со стороны нити натяжение, равное силе F_2 , прямо приложенной на другом конце. Таким образом, действие силы передается неизменным вдоль нити, пока нить прямолинейна, находится в равновесии и на нее не действуют другие силы, кроме сил, приложенных на концах.

Этой передачей силы посредством нити мы уже пользовались во многих конкретных примерах (и при менее простых обстоятельствах); при этом мы пришли к некоторым законам, хотя и приближенным путем (гл. VII, § 6). Как на самом деле протекает это явление, мы последуем в п. 58.

36. Условия равновесия. Рассмотрим теперь часть нити, на которую силы действуют не только на концах, но также и в некотором числе (конечном) каких-нибудь промежуточных точек.

Обозначим через P_1 и P_n два конца, через P_2, P_3, \dots, P_{n-1} промежуточные точки, к которым приложены силы, и через F_i силу, приложенную в P_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для того чтобы знать, может ли и при каких условиях (если может) нить находиться в равновесии, заметим прежде всего, что в силу принятого постулата отдельные части $P_i P_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) нити должны быть прямолинейными.

Выбрав какие-нибудь две точки A_i и B_{i+1} (фиг. 63) между P_i и P_{i+1} (в написанном порядке), найдем, что часть $A_i B_{i+1}$ нити должна находиться в равновесии под действием натяжений на концах. Обозначим через $\Phi_{i,i+1}$ натяжение, действующее в B_{i+1} ; при равновесии, как мы видели, оно направлено в сторону от P_i к P_{i+1} и не зависит от положения B_{i+1} . Аналогично, обозначим через $\Phi_{i+1,i}$ натяжение, действующее в A_i ; оно направлено в сторону от P_{i+1} к P_i , не зависит от положения A_i и уравнивает натяжение $\Phi_{i,i+1}$, что выражается равенством

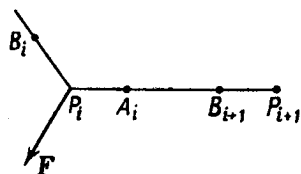
$$\Phi_{i,i+1} = -\Phi_{i+1,i}, \quad (4)$$

где индекс i может принимать значения $1, 2, \dots, n-1$. Эти векторные соотношения между натяжениями тождественны по форме с равенствами (4) п. 5, которые получаются для усилий в случае равновесия F_i системы, состоящей из твердых стержней, сочлененных посредством шарниров. Прежнюю форму сохраняют также и другие условия равновесия.

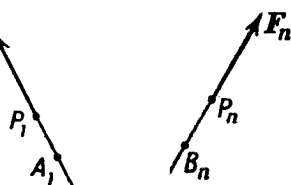
Действительно, выразим то обстоятельство, что элемент $B_i P_i A_i$ нити, содержащий точку P_i ($i = 2, 3, \dots, n-1$), находится в равновесии. Представляя себе, что B_i и A_i бесконечно близки к P_i , мы можем рассматривать этот элемент как материальную точку, на которую действуют три силы: прямо приложенная сила F_i и натяжения нити в B_i и в A_i , соответственно равные $\Phi_{i,i-1} = -\Phi_{i-1,i}$, $\Phi_{i,i+1}$. Приравнявая нулю их результирующую, получим равенства (5) п. 5. Аналогично, рассматривая два крайних элемента типа $P_1 A_1$, $B_n P_n$ (фиг. 64) и принимая их за материальные точки, мы будем иметь уравнения (6) п. 5 для концов.

Мы установили, таким образом, необходимость условий (4), (5), (6). Но они также и достаточны для равновесия, поскольку они обеспечивают его для любых частей нити, представляющих собой прямолинейные отрезки [что видно из равенства (4)] или элементы, содержащие P [что видно из равенств (5) и (6)] (при условии, что усилия Φ представляют собой натяжения).

В заключение мы имеем следующий результат: *гибкая и нерастяжимая нить (на которую действуют силы в конечном числе*



Фиг. 63.



Фиг. 64.

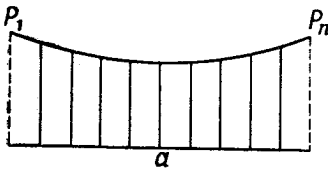
точек) ведет себя в отношении равновесия как система, состоящая из твердых стержней, с одним лишь добавочным ограничением, заключающимся в том, что усилия должны быть только растягивающими.

Таким образом, статические вопросы, относящиеся к нитям, рассматриваются способом, изложенным выше для стержневых систем; однако здесь надо принимать во внимание дальнейшее качественное условие, относящееся к стороне, в которую действуют усилия.

Если для некоторой конфигурации мы установили, что все количественные условия выполнены, но некоторые усилия являются сжимающими, то надо заключить, что равновесие нити в этой конфигурации невозможно. Для обеспечения равновесия можно было бы, например, заменить некоторые части нити (сжимаемые) твердыми стержнями.

Конфигурация равновесия нити, как и конфигурация стержневой системы, называется *веревочным многоугольником*; именно случай нити (практически веревки или цепи) и дал повод для такого названия.

37. Висячие мосты (реальный случай дискретной системы сил). В качестве простого примера рассмотрим канаты, поддерживающие подвесной мост, и отыщем конфигурацию, которая должна соответствовать состоянию равновесия.



Фиг. 65.

Канаты закреплены на концах, а расположенная ниже проезжая часть моста прикрепляется к канатам посредством вертикальных тяг, равноотстоящих друг от друга.

Обозначим через P_1 и P_n (фиг. 65) концы одного из двух канатов, через P_2, P_3, \dots, P_{n-1} точки прикрепления тяг.

Считая мост горизонтальным (с двумя поддерживающими канатами, расположенными симметрично), можно допустить, что вес P моста равномерно распределен между различными тягами, так что на каждую из них действует вес

$$P' = \frac{P}{2(n-2)}.$$

Пренебрегая по сравнению с P' собственными весами канатов и тяг, каждый канат можно уподобить нити, закрепленной на концах P_1, P_n и находящейся под действием (равных) весов, приложенных в промежуточных точках P_2, P_3, \dots, P_{n-1} .

Предположение, что тяги находятся на одинаковых расстояниях друг от друга, приводит к тому, что *горизонтальные проекции* различных частей $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ каната должны быть равны между собой, так что если a есть длина моста, то общая

всем частям длина их проекций будет

$$\varepsilon = \frac{a}{n-1}.$$

Для определения веревочного многоугольника мы, очевидно, опять приходим к задаче, рассмотренной в пп. 11—12, поэтому можно утверждать, что весь канат будет лежать в вертикальной плоскости, проходящей через его концы.

Пользуясь опять обозначениями п. 12, мы будем иметь в этом случае два упрощающих обстоятельства: все p_i равны P' , и горизонтальные проекции $l_i \cos \alpha_i$ отдельных частей $P_i P_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) каната также будут одинаковы и каждая из них будет равна ε .

Вертикальные проекции $l_i \sin \alpha_i$ можно выразить в форме

$$l_i \cos \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_i = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_i,$$

в то время как равенства (10), (10') принимают вид

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\psi + (i-1)P'}{\varphi} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (38)$$

где φ есть постоянная по величине проекция на ось x усилий $\Phi_{1,2}, \Phi_{2,3}, \dots, \Phi_{n-1,n}$, которые здесь представляют собой натяжения (п. 36). Теперь важно отметить, что если предположим ось x ориентированной так, чтобы абсцисса x_n точки P_n была больше абсциссы x_1 точки P_1 (т. е. в сторону от P_1 к P_n), то постоянная φ будет существенно положительной. Действительно, из того, что каждая из сил $\Phi_{i,i+1}$ является растягивающей, и следует, что она направлена в сторону от P_i к P_{i+1} (п. 5), так что постоянная горизонтальная проекция φ различных сил $\Phi_{i,i+1}$ могла бы быть отрицательной только в том случае, если бы абсциссы точек P_1, P_2, \dots, P_n убывали (в алгебраическом смысле), что невозможно при условии $x_n > x_1$.

Отсюда легко вытекает *характеристическое свойство веревочного многоугольника, заключающееся в том, что его можно вписать в параболу с вертикальной осью*. В самом деле, для любой вершины P_i ($i = 2, 3, \dots, n$) имеем

$$\left. \begin{aligned} x_i - x_1 &= (i-1)\varepsilon, \\ y_i - y_1 &= \varepsilon (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_{i-1}), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

как это получается, если спроектировать на обе оси ломаную линию $P_1 P_2 \dots P_i$ и принять во внимание, что проекции ее равны соответственно $x_i - x_1, y_i - y_1$. Внося во второе из равенств (39) значения тангенсов, даваемые равенствами (12), получим

$$y_i - y_1 = \frac{\varepsilon}{\varphi} (i-1) \left\{ \varphi + P' \frac{i-2}{2} \right\}$$

или, подставляя вместо $i-1$ и $i-2$ значения, получаемые из первого из равенств (39),

$$y_i - y_1 = \frac{x_i - x_1}{\varphi} \left\{ \psi + \frac{P'}{2\varepsilon} (x_i - x_1 - \varepsilon) \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (40)$$

Отсюда заключаем, что координаты x_i, y_i каждой точки P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют уравнению

$$y - y_1 = \frac{x - x_1}{\varphi} \left\{ \psi + \frac{P'}{2\varepsilon} (x - x_1 - \varepsilon) \right\}, \quad (41)$$

которое выражает параболу с вертикальной осью, обращенную вогнутостью вверх (так как коэффициент $P'/2\varepsilon\varphi$ члена второй степени относительно x существенно положителен).

Если уравнение (41) отнести к двум осям ξ, η , параллельным осям x, y , направленным в ту же сторону и имеющим начало в самой нижней точке параболы, т. е. в ее вершине V , которая имеет координаты

$$x_1 + \frac{\varepsilon(P' - 2\psi)}{2P'}, \quad y_1 - \frac{\varepsilon(P' - 2\psi)^2}{8P'\varphi},$$

то оно примет вид

$$\eta = \frac{P'}{2\varepsilon\varphi} \xi^2.$$

38. Нить под действием непрерывно распределенной нагрузки. Рассмотрим тяжелую нить AB , находящуюся в равновесии под действием сил F_A и F_B , приложенных к ее концам, и сил тяжести. Сила тяжести (вес) действует на каждый элемент нити; если для определенности предположим, что нить однородна и обладает плотностью (линейной), равной единице (гл. X, п. 6), то можно считать, что каждый материальный элемент нити находится под действием силы $g ds$ (бесконечно малой того же самого порядка, что и ds), где g , как обычно, означает ускорение (вектор) силы тяжести.

Можно представить себе, что нить при помощи надлежащих искусственных приспособлений и благодаря специальным физическим условиям окружающей среды помимо (или сверх) силы тяжести подвергается, кроме (конечных) сил F_A, F_B , приложенных на концах, действию *непрерывно распределенных сил*, т. е. сил какой угодно природы, действующих на каждую сколь угодно малую часть нити. Так же, как в случае силы тяжести, мы будем считать, что на нить действует бесконечно много бесконечно малых сил, приложенных к различным материальным элементам ds нити; каждую из этих сил можно представить в виде $F ds$, где F есть некоторый конечный и определенный вектор (вообще говоря, непрерывно изменяющийся от элемента к элементу). Вектору F дано название *нагрузка*, или *сила на единицу длины*; модуль (как отношение силы в собственном смысле к длине) не имеет размерности

силы. Причиной такого названия является то обстоятельство, что если вектор \mathbf{F} остается постоянным вдоль некоторой части нити, то его можно определить как отношение результирующей сил, действующих на эту часть, к длине самой части, или, другими словами, как результирующую сил, действующих на часть нити, имеющую единицу длины. В общем случае вектор \mathbf{F} представляет собой предел только что указанного отношения при стремлении к нулю длины части нити, находящейся под действием сил.

Заметим еще, что всякую систему непрерывно распределенных сил можно рассматривать как предел системы конечного числа сил, приложенных к дискретной совокупности точек, в предположении, что число сил стремится к бесконечности и соответственно стремится надлежащим образом к нулю всякая приложенная сила. Отсюда заключаем, что фигура равновесия нити в случае непрерывно распределенных сил представляет собой кривую (предел переменного веревочного многоугольника), которая называется *веревочной кривой*. От этих интуитивных соображений мы обратимся теперь к рассуждениям аналитического характера, чтобы прийти к дифференциальным уравнениям, определяющим веревочные кривые.

39. Натяжение. Пусть даны силы \mathbf{F}_A и \mathbf{F}_B , приложенные к концам нити AB , и сила \mathbf{F} , отнесенная к единице длины нити; всякая часть нити AP , заключенная между точкой A и любой точкой P нити, испытывает в точке P , вследствие соединения ее с остальной частью PB нити, некоторое усилие \mathbf{T} , аналогичное усилиям Φ отдельных стержней веревочного многоугольника. Поэтому для распространения на этот предельный случай свойств усилий, возникающих при действии дискретных сил, нам придется допустить, что усилие \mathbf{T} направлено к точке, бесконечно близкой к P , т. е. по касательной к нити в точке P , и имеет характер растягивающего усилия. Оно называется натяжением нити в точке P . Поэтому, если условимся обозначать через s дугу AP нити, отсчитываемую в направлении от A к B , которое мы будем считать положительным, натяжение для всякой определенной точки нити будет представлять собой вектор, касательный в точке M к нити, направленный в сторону возрастающих значений дуги s и зависящий от s .
Усилие в точке P , испытываемое частью PB нити со стороны части AP , на основании принципа равенства действия и противодействия равно $-\mathbf{T}(s)$.

40. Уравнения равновесия. Для того чтобы получить уравнения равновесия нити, достаточно выразить то обстоятельство, что силы, действующие на каждый отдельный элемент нити, находятся в равновесии. На любой элемент нити, заключенный между точками с криволинейными абсциссами s и $s + ds$ (фиг. 66), действуют три силы: активная сила $\mathbf{F} ds$, натяжение в конечной точке $s + ds$ элемента,

равное $\mathbf{T}(s + ds)$, или, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, $\mathbf{T}(s) + d\mathbf{T}$ и, наконец, натяжение в начальной точке s элемента, равное, в силу сказанного в конце предыдущего пункта, $-\mathbf{T}(s)$. Так как элемент нити можно рассматривать как материальную точку (см. гл. X, п. 4), то необходимое и достаточное условие равновесия заключается в равенстве нулю результирующей этих трех сил и, следовательно, выражается векторным уравнением

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{F} = 0, \quad (42)$$

которое должно выполняться для каждой точки P , внутренней для дуги AB нити; это уравнение объединяет в себе *неопределенные условия* равновесия, т. е. условия равновесия произвольно выделенной части нити. Обратимся теперь к условиям на концах (по существу тождественным условиям (6) п. 5); выражая, что каждый из концов A , B находится в равновесии под действием соответствующей силы \mathbf{F}_A или \mathbf{F}_B и натяжения, действующего на него со стороны нити, мы получим уравнения

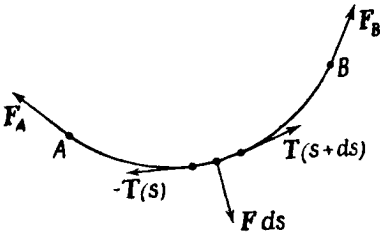
$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{T}(0), \quad \mathbf{F}_B = \mathbf{T}(l), \quad (43)$$

где l означает длину нити.

Уравнения (42), (43) вместе дают необходимые и достаточные

условия равновесия. Следует заметить (как мы уже имели случай напомнить в п. 6), что необходимые условия равновесия любой материальной системы всегда заключают в себе оба основных уравнения для любой части системы. Первое основное уравнение мы уже приняли во внимание, так как мы применили его к произвольному элементу нити, получив таким образом уравнение (42). Если бы подобным же образом мы применили к этому элементу второе основное уравнение, приравнивая нулю результирующий момент (например, относительно конца s), то легко увидели бы, что это условие автоматически выполняется в силу предположения, что натяжение \mathbf{T} направлено по касательной к нити. Поэтому можно было бы избежать предварительного введения этого геометрического предположения (которое оказывалось очевидным при переходе к пределу от случая веревочного многоугольника) и, наоборот, получить его затем в качестве следствия из второго основного уравнения.

41. Можно сделать вывод, что, как и в случае веревочного многоугольника (п. 6), уравнения (42) и (43), так как они представляют собой необходимые и достаточные условия равновесия, должны содержать основные уравнения как для целой нити, так и



Фиг. 66.

для всякой ее конечной части. Для того чтобы проверить это, достаточно заметить, что и в этом случае каждое из уравнений (42), (43), поскольку оно выражает обращение в нуль результирующей трех (или двух) сил, действующих на один и тот же материальный элемент, который можно рассматривать как точку, можно истолковать как соотношение эквивалентности между системами приложенных векторов. То же самое истолкование остается и для уравнения, которое мы получим, интегрируя уравнения (42) вдоль нити между двумя точками P' , P'' с криволинейными абсциссами s' , s'' , т. е. для уравнения

$$\mathbf{T}(s'') - \mathbf{T}(s') + \int_{s'}^{s''} \mathbf{F} ds = 0,$$

которое как раз и выражает, что система всех внешних сил, действующих на любую часть $P'P''$ нити, векторно эквивалентна нулю.

Уравнения (42), (43), будучи не только необходимыми, но и достаточными для равновесия, кроме основных уравнений, содержат все те дальнейшие условия, которые достаточны для того, чтобы обеспечить равновесие рассматриваемой (изменяемой) материальной системы.

42. Для того чтобы спроектировать векторное уравнение (42) на оси координат, вспомним, что растягивающее усилие \mathbf{T} есть вектор, касательный к нити и направленный в сторону возрастающих дуг s , так что оно может быть представлено в виде $T(s)\mathbf{t}$, где \mathbf{t} есть единичный вектор dP/ds касательной, а функция $T(s)$ существенно положительна. Поэтому проекция вектора \mathbf{T} будут равны $T \frac{dx}{ds}$, $T \frac{dy}{ds}$, $T \frac{dz}{ds}$. Если теперь X , Y , Z суть проекции силы, относящейся к единице длины, то из уравнения (42) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42')$$

Что же касается переменной величины s , то она не является произвольным параметром, а представляет собой длину дуги веревочной кривой, так что должна быть связана с x , y , z дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1. \quad (44)$$

Из предыдущего следует, что задача определения фигуры равновесия нити под действием данных непрерывно распределенных сил

приводит к интегрированию системы дифференциальных уравнений. А именно: если силу, приходящуюся на единицу длины, можно рассматривать как позиционную, так что X , Y , Z являются известными функциями от x , y , z , то неизвестными задачи, если мы временно отвлечемся от условий на концах, являются четыре функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ и $T(s)$, из которых первые три определяют веревочную кривую, а четвертая дает натяжение и, как мы знаем, должна быть существенно положительной.

Для того чтобы определить эти четыре неизвестных, мы имеем три уравнения (42') второго порядка (относительно x , y , z) и одно уравнение (44) первого порядка; произвольные постоянные, от которых зависит общий интеграл, легко вычисляются. Для этой цели заметим, что, продифференцировав уравнение (44), получим

$$\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \quad (44')$$

откуда, выполнив в уравнениях (42') дифференцирование по s и просуммировав почленно, после умножения их соответственно на

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

получим

$$\frac{dT}{ds} = - \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) = - F \cdot t. \quad (44'')$$

Теперь, пользуясь этим равенством, достаточно исключить из уравнений (42') dT/ds , чтобы можно было определить из них величины

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2};$$

на основании примечания 2 к п. 18, гл. II (ч. I, стр. 103) мы можем заключить, что общий интеграл системы, состоящей из уравнений (42') и (44''), зависит от *семи произвольных постоянных*. Но эта система, как это проверяется вычислением, обратным только что указанному, включает уравнение (44'), так что допускает интеграл

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = \text{const};$$

одну из семи произвольных постоянных мы должны выбрать так, чтобы сделать правую часть равной единице. Таким образом, мы заключаем, что *общий интеграл системы (42'), (44) зависит от шести произвольных постоянных*, которые должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось столько же независимых условий; например, если в качестве условий на концах заданы силы F_A и F_B , то при проектировании на оси координат мы получим как раз шесть скалярных уравнений. Но в конкретных задачах в число

данных не входят силы, приложенные к концам; обычно предполагается, что концы нити (имеющей длину l) прикреплены к двум данным неподвижным точкам A и B . В таком случае шесть произвольных постоянных должны быть определены так, чтобы функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ при $s=0$ и $s=l$ были равны заданным координатам точки A и соответственно точки B ; уравнения (43) служат тогда для определения реакций F_A и F_B в закрепленных точках.

43. Если нить, кроме непрерывно распределенной нагрузки, находится под действием конечных сил, приложенных в одной или нескольких внутренних точках, то условимся разбивать ее на части, на которые она будет делиться этими точками. Для каждой части продолжают сохранять свое значение предыдущие рассуждения; несколько сложнее будет определение постоянных (шесть для каждой части). Условий, которые должны быть удовлетворены в точках деления, будет также шесть для каждой точки: три условия выражают, что две части имеют общую точку, остальные три определяют равновесие этой точки, которая играет роль узла в веревочном многоугольнике.

44. Параллельные силы. В п. 11 мы видели, что веревочный многоугольник, в промежуточных узлах которого действуют параллельные силы, лежит в плоскости, содержащей общее направление сил. Отсюда мы заключаем, переходя к предельному случаю непрерывно распределенных сил, действующих по одному постоянному направлению, что веревочная кривая будет плоской кривой. Это заключение можно получить на основании уравнений (42'), предполагая одну из осей, например ось y , параллельной силам. Тогда имеем $X=Z=0$ и из первого и третьего уравнений (42'), интегрируя по s , получаем

$$T \frac{dx}{ds} = \varphi,$$

$$T' \frac{dz}{ds} = C,$$

где φ и C обозначают две произвольные постоянные; после этого, умножая первое из этих уравнений на dz/ds , второе на dx/ds и почленно вычитая, получаем

$$C \frac{dx}{ds} - \varphi \frac{dz}{ds} = 0,$$

откуда, интегрируя еще раз, находим

$$Cx - \varphi z = \text{const};$$

это линейное уравнение между координатами x , z произвольной точки веревочной кривой и выражает то, что она лежит в плоскости,

параллельной оси y , т. е. параллельной общему направлению активных сил. Уравнение это сводится к тождеству в частном случае, когда $C = \varphi = 0$. Этот случай можно оставить в стороне, заметив, что он содержит в себе один из следующих двух случаев: или $T = 0$, и тогда, на основании уравнения (42), это означало бы обращение в нуль силы \mathbf{F} ; или $dx/ds = dy/ds = 0$, что означало бы прямолинейную веревочную кривую, имеющую то же направление, что и \mathbf{F} ; оба этих тривиальных случая мы будем предполагать исключенными. Поэтому во всех остальных случаях плоскость, содержащая веревочную кривую, будет определена; легко прямо прийти к плоской задаче, если за координатную плоскость выбрать плоскость xy . Уравнение

$$T \frac{dz}{ds} = C$$

сводится тогда к тождеству (постоянная C принимает частное значение нуль) и для определения кривой и растягивающего усилия остаются два уравнения

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx}{ds} &= \varphi, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) &= -Y, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

к которым надо присоединить уравнение, определяющее параметр s как дугу веревочной кривой

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1. \quad (46)$$

Постоянная φ , как это видно из первого уравнения (45), является произвольной постоянной, о которой можно только сказать, рассуждая как и выше, что она отлична от нуля.

Механическое истолкование постоянной $\varphi \neq 0$ вытекает непосредственно из первого уравнения (45): она равна проекции на ось x натяжения \mathbf{T} , откуда заключаем, что *составляющая натяжения, нормальная к неизменяемому направлению действующей силы, постоянна вдоль веревочной кривой.*

В этой формулировке мы видим предельный случай свойства, найденного в п. 12 для веревочных многоугольников; постоянная φ в обоих случаях имеет один и тот же смысл.

Заметим, наконец, что интегрирование системы уравнений (45), (46) вводит, кроме φ , три другие произвольные постоянные, как легко убедиться на основании обычного критерия (гл. II, п. 18 и гл. XIV, п. 42).

Для определения четырех произвольных постоянных остаются в силе соображения, которые приведены в п. 42 и 43, в применении к случаю плоской задачи.

45. Висячие мосты (*упрощающее предположение о непрерывном распределении приложенных сил*). В п. 37 мы изучили конфигурацию равновесия канатов, поддерживающих подвесные мосты, предполагая, что вес моста поровну распределен между некоторым конечным числом дискретных точек (точки прикрепления тяг). На основании такого предположения мы нашли, в качестве конфигурации равновесия каждого поддерживающего каната, многоугольник, вписанный в параболу с вертикальной осью, проходящей через концы каната.

Если число тяг велико, то практически можно рассматривать силы как распределенные непрерывно и допустить, что каждый элемент каната поддерживает половину части моста, непосредственно лежащую под этим элементом, между тем как другая половина приходится на второй канат.

Задача, поставленная таким образом, решается даже более просто, чем задача в п. 37, где рассматривались дискретно действующие силы; при этом мы приходим к особенно простой формуле, постоянно применяемой в технике.

Прежде чем приступить к аналитическому решению, заметим, что конфигурация равновесия представляет собой параболу с вертикальной осью, обращенную вогнутостью вверх и проходящую через концы (предельный случай вписанного многоугольника).

46. Так как все силы вертикальны, то веревочная кривая будет плоской и можно исходить из уравнений (45) и (46) п. 44, если за плоскость xy принять вертикальную плоскость, проходящую через концы A , B рассматриваемого каната, а ось y направить вертикально (например, вверх), оставляя временно произвольным положение начала.

Вследствие этого, если структура моста одинакова по всей его длине и если мы обозначим через $2p$ все единицы длины моста, то каждый элемент ds каната будет находиться под действием вертикальной силы, величина которой равна произведению p на горизонтальную проекцию элемента ds (это произведение равно весу половины части моста, находящейся непосредственно под элементом ds).

Заметим теперь, что в силу первого из уравнений (45), в котором φ является постоянной (отличной от нуля), dx/ds не может обращаться в нуль. Если выбрать положительное направление (горизонтальной) оси x в сторону от A к B , то производная dx/ds всегда будет положительной, так как, не обращаясь в нуль, она не может изменить знак, и если бы она была отрицательной, то абсцисса x должна была убывать, когда s переходит от значения 0 (точка A) к значению l (точка B), тогда как, в силу способа выбора положительного направления оси x , абсцисса точки B будет больше абсциссы точки A .

При этом соглашении dx (приращение, которое испытывает x при положительном приращении дуги ds) есть величина существенно положительная и представляет собой горизонтальную проекцию элемента. Сила, действующая на элемент dx , равна pdx и направлена по вертикали вниз; поэтому сила, приходящаяся на единицу длины каната, определяется выражением pdx/ds , а ее проекция Y на ось y (вертикальную и направленную вверх) — выражением

$$Y = -p \frac{dx}{ds}.$$

Внося это значение в уравнения (45), получим

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx}{ds} &= \varphi, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) &= p \frac{dx}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (45')$$

где постоянную φ надо считать положительной; такой же должна быть и функция T по своей природе, а в рассматриваемом случае и dx/ds .

47. Найдя таким образом дифференциальные уравнения равновесия, перейдем к их интегрированию.

Из второго уравнения (45') посредством одной квадратуры получаем

$$T \frac{dy}{ds} = px + \text{const};$$

так как до сих пор были определены направления осей, а не положение начала, то мы можем путем поступательного перемещения осей параллельно оси x заставить ось y проходить через точку, в которой касательная горизонтальна, т. е. через точку, в которой $dy/dx = 0$ (скоро мы увидим, что речь идет о точке минимума).

Таким образом, мы будем иметь

$$T \frac{dy}{ds} = px, \quad (47)$$

после чего достаточно будет разделить почленно это уравнение на первое из уравнений (45') и исключить T и s , чтобы получить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\varphi} x,$$

интегрирование которого, очевидно, дает

$$y = \frac{p}{2\varphi} x^2 + \text{const},$$

где постоянная интегрирования обращается в нуль вследствие переноса начала координат в точку, лежащую на кривой. Благодаря

этому уравнение веревочной кривой принимает вид

$$y = \frac{p}{2\varphi} x^2, \quad (48)$$

а отсюда видно, что эта кривая есть парабола с вершиной в начале координат, имеющая осью симметрии ось y и обращенная вогнутостью вверх.

Что касается натяжения T , то достаточно возвести в квадрат и сложить первое из уравнений (45') и уравнение (47) и принять во внимание равенство (46), чтобы получить

$$T^2 = p^2 x^2 + \varphi^2. \quad (49)$$

Естественно, что натяжение будет минимальным и равным своей постоянной горизонтальной составляющей φ в самой низкой точке веревочной кривой ($x = 0$).

48. Представляет интерес сравнение параболы (48) с параболой, которую мы получили в п. 37 как описанную вокруг веревочного многоугольника и которая, если отнести ее к главной оси (вертикальной) и касательной в вершине, выражается уравнением

$$\eta = \frac{P'}{2\varepsilon\varphi} \xi^2. \quad (40')$$

Если мы примем во внимание соотношения

$$P' = \frac{P}{2(n-2)}, \quad \varepsilon = \frac{a}{n-1},$$

связывающие P' с весом P моста и расстояние ε между ттягами с несущей частью a (п. 37), то получим

$$\frac{P'}{2\varepsilon\varphi} = \frac{(n-1)P}{4(n-2)a\varphi} = \left(1 + \frac{1}{n-2}\right) \frac{P}{4a\varphi};$$

отсюда, если заставить число $n-1$ ттяг (предполагая их равноотстоящими друг от друга) стремиться к бесконечности, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'}{2\varepsilon\varphi} = \frac{P}{4a\varphi}.$$

Мы видим, таким образом, что парабола (40'), описанная вокруг веревочного многоугольника, при $n \rightarrow \infty$ стремится к параболе (48).

49. Как бы ни были заданы условия на концах, предназначенные для того, чтобы определить конфигурацию равновесия, эта конфигурация представляет собой, при надлежащем значении механической постоянной φ , дугу параболы, выражаемой уравнением (48). В конкретных случаях чаще всего задаются, для каждого каната, концы A и B , расположенные на одном и том же уровне,

и расстояние a (длина моста или *пролет* поддерживающих канатов). Обе точки A , B , очевидно, симметричны относительно оси y параболы, так что их абсциссами соответственно будут $\mp a/2$. Поэтому на основании уравнений для концов (43) и равенства (49) заключаем, что обе реакции F_A , F_B в закрепленных точках по абсолютной величине равны

$$\sqrt{\frac{1}{4} a^2 p^2 + \varphi^2}.$$

Разница в уровнях между концами каната, с одной стороны, и его низшей точкой, с другой, называется *стрелой провеса*; обозначая стрелу провеса через f и замечая, что она есть не что иное, как общая ордината точек A и B , найдем, полагая в уравнении (48) $x = \mp a/2$,

$$f = \frac{pa^2}{8\varphi}; \quad (48')$$

это и есть та формула, важная вследствие ее технических приложений, о которой мы упоминали в п. 45.

Остается еще определить соотношение, связывающее механическую постоянную φ с данными вопроса, т. е. с величинами p и a и длиной l каната. Очевидно, что l определяется длиной дуги параболы (48), заключенной между точками A и B ; если ввести, на основании уравнения (46), элемент дуги ds веревочной кривой, то l примет вид

$$l = 2 \int_0^{a/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

где радикал должен браться в арифметическом смысле, а производная dy/dx должна быть вычислена на основании уравнения (48). Таким образом, получится

$$l = 2 \int_0^{a/2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\varphi^2} x^2} dx,$$

или, если положить $\mu = px/\varphi$,

$$l = \frac{2\varphi}{p} \int_0^{pa/2\varphi} \sqrt{1 + \mu^2} d\mu; \quad (50)$$

отсюда, в помятая элементарную формулу интегрирования

$$2 \int \sqrt{1 + \mu^2} d\mu = \ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) + \mu \sqrt{1 + \mu^2},$$

закключаем, что

$$l = \ln \frac{\varphi}{p} \left\{ \frac{pa}{2\varphi} + \sqrt{1 + \frac{p^2 a^2}{4\varphi^2}} \right\} + a \sqrt{1 + \frac{p^2 a^2}{4\varphi^2}}.$$

Из этой формулы, или, проще, из формулы (50), можно получить приближенное выражение длины l , пригодное всякий раз, когда pa/φ (отношение между полной нагрузкой и горизонтальной составляющей φ натяжения, равной горизонтальной составляющей каждой из сил, приложенных на концах) будет достаточно малым, например таким, четвертой степенью которого можно было бы пренебречь, как это вообще делается в технических задачах.

Так как переменная интегрирования μ остается всегда меньше, чем $pa/2\varphi$, то с тем большим основанием можно пренебречь степенями μ , начиная с четвертой. Поэтому если применим разложение в ряд Тэйлора к выражению $\sqrt{1+\mu^2} = (1+\mu^2)^{1/2}$, то можно будет остановиться на втором члене, опуская остаток, содержащий множителем μ^4 .

Подставляя $1 + \mu^2/2$ вместо $\sqrt{1 + \mu^2}$, получим

$$l = \frac{\varphi}{p} 2 \int_0^{pa/2\varphi} \left(1 + \frac{1}{2} \mu^2\right) d\mu,$$

откуда будем иметь приближенное выражение

$$l = a \left(1 + \frac{p^2 a^2}{24 \varphi^2}\right). \quad (51)$$

50. Однородная цепь. К задаче, изученной в предыдущих пунктах, присоединим задачу об определении конфигурации равновесия материальной однородной нити, подвешенной за концы в двух заданных точках A и B (не расположенных на одной и той же вертикали) и подвергающейся только действию силы тяжести.

В этом случае все внешние силы также вертикальны, так что (п. 44) веревочная кривая будет лежать в вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B ; предположим, как в п. 46, что ось y направлена вертикально вверх, а ось x — так, чтобы абсцисса точки B была (алгебраически) больше абсциссы точки A , и сначала оставим положение начала произвольным.

Сила, приходящаяся на единицу длины нити, представляет собой вес (постоянный, так как речь идет об однородной нити) части нити длиной 1. Обозначив через p величину этой силы, будем иметь $X = 0$, $Y = -p$; поэтому уравнения равновесия (45) п. 44 в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx}{ds} &= \varphi, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) &= p; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

постоянная φ при указанной выше ориентировке осей, как и в общем случае в п. 44, должна быть положительной.

Исключая T из второго уравнения при помощи первого, получим

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{\varphi},$$

где dy/dx означает отношение между приращениями координат вдоль веревочной кривой, соответствующее приращению ds дуги. Принимая абсциссу x за независимую переменную, а ординату y — за функцию, можно придать только что найденному соотношению вид дифференциального уравнения только между координатами x, y точек веревочной кривой.

Если мы напишем для краткости y' вместо dy/dx и заметим, что ds можно заменить через $\sqrt{1+y'^2} dx$, то, умножая на dx , получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} dy' = \frac{p}{\varphi} dx. \quad (53)$$

Если производную y' рассматривать как вспомогательную независимую, то равенство (53) будет дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными, которое интегрируется непосредственно и дает

$$\ln(\sqrt{1+y'^2} + y') = \frac{p}{\varphi} x + \text{const};$$

пользуясь свободой выбора начала осей (у которых неизменны только направления), постоянную интегрирования можно свести к нулю, перенося ось y поступательно в направлении, параллельном оси x , так чтобы она (ось y) прошла через точку, в которой касательная к веревочной кривой горизонтальна, т. е. $y' = 0$ (мы увидим, что существует только одна такая точка и она будет как раз точкой минимума).

Таким образом, получим

$$\ln(\sqrt{1+y'^2} + y') = \frac{p}{\varphi} x,$$

или, переходя от логарифмов к числам,

$$\sqrt{1+y'^2} + y' = e^{(p/\varphi)x}. \quad (54)$$

Отсюда, принимая во внимание тождество

$$(\sqrt{1+y'^2} + y')(\sqrt{1+y'^2} - y') = 1,$$

выводим

$$\sqrt{1+y'^2} - y' = e^{-(p/\varphi)x};$$

это уравнение в результате вычитания из уравнения (54) и сложения с ним дает

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} (e^{(p/\varphi)x} - e^{-(p/\varphi)x}), \\ \sqrt{1+y'^2} &= \frac{1}{2} (e^{(p/\varphi)x} + e^{-(p/\varphi)x}). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Первое из этих уравнений посредством одной квадратуры дает

$$y = \frac{\varphi}{2p} (e^{(p/\varphi)x} - e^{-(p/\varphi)x}) + \text{const.}$$

Теперь достаточно выполнить поступательное перемещение осей параллельно оси y (т. е. принять за новую ординату разность $y - \text{const}$), чтобы постоянную интегрирования свести к нулю. Таким образом, для веревочной кривой (относительно осей, которые, в силу предыдущего, теперь уже вполне определены) получается уравнение

$$y = \frac{\varphi}{2p} (e^{(p/\varphi)x} + e^{-(p/\varphi)x}). \quad (56)$$

С другой стороны, припоминая, что $\sqrt{1+y'^2} dx = ds$, и условившись измерять дуги s веревочной кривой, начиная от точки кривой с абсциссой $x=0$ в сторону возрастающих x , из второго из уравнений (55) посредством одной квадратуры получим

$$s = \frac{\varphi}{2p} (e^{(p/\varphi)x} - e^{-(p/\varphi)x}). \quad (57)$$

Заметим, что если ввести гиперболические функции

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

и положить $\lambda = \varphi/p$, то уравнения (56), (57) примут вид

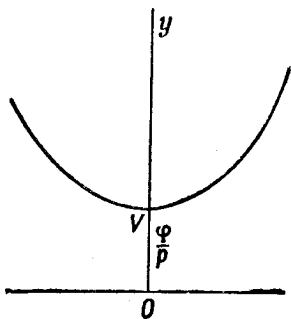
$$y = \lambda \text{ ch } \frac{x}{\lambda}, \quad (56')$$

$$s = \lambda \text{ sh } \frac{x}{\lambda}. \quad (57')$$

51. Кривая (56) или (56'), найденная Гюйгенсом, называется *цепной линией* и обычно характеризуется названием *однородная*, если общее название *цепных* линий распространить на все кривые равновесия тяжелых нитей или цепей (также и неоднородных).

Чтобы отдать себе отчет о форме однородной цепной линии, заметим прежде всего, что производная $dy'/dx = d^2y/dx^2$, на основании равенства (53), всегда положительна, так что y' постоянно возрастает, а так как функция y' , как это следует из первого урав-

нения (55), обращается в нуль при $x=0$, то мы видим, что она отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$. Отсюда и из уравнения (56) следует, что ордината y цепной линии всегда положительна (фиг. 67) и стремится к бесконечности при $x \rightarrow \pm \infty$; она монотонно убывает, когда x изменяется от $x = -\infty$ до $x = 0$, достигает при $x = 0$ минимума (положительного) $\lambda = \varphi/p$ (самая нижняя точка, или *вершина* V цепной линии)



Фиг. 67.

и затем монотонно возрастает при возрастании x от 0 до $+\infty$. Кроме того, так как функция y , определяемая равенством (56), представляет собой четную функцию абсциссы (т. е. принимает одни и те же значения для противоположных значений x), то цепная линия симметрична относительно оси y , т. е. относительно вертикали, проходящей через самую нижнюю точку V . Отсюда и из единственности минимума следует, что если дуга цепной линии имеет концами две точки A и B , расположенные на одном и том же уровне, то вся она лежит ниже горизонтали AB и симметрична относительно вертикали, проходящей через середину, что можно было предвидеть на основании статического истолкования цепной линии.

Горизонтальная ось x , к которой отнесено уравнение (56), называется *основанием* цепной линии, а существенно положительная ордината $\lambda = \varphi/p$ самой нижней точки называется *параметром* ее.

52. Как уже указывалось несколько раз, типичная задача состоит в отыскании конфигурации равновесия однородной нити заданной длины l , когда даны обе точки прикрепления A и B (не расположенные на одной и той же вертикали).

В таком случае заранее неизвестно, каково будет положение начала O тех осей, к которым относятся уравнения (56), (57) [или (56'), (57')], относительно точек A и B , между тем как ориентация этих осей известна; обе они лежат в вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B , и ось x горизонтальна, а ось y вертикальна и направлена вверх. Любая система осей, имеющих такие направления, может быть получена простым поступательным перемещением из той, к которой должны быть отнесены уравнения (56), (57), поэтому более общие уравнения могут быть получены из уравнений (56), (57) при помощи подстановки вместо x и y соответственно $x - x_0$, $y - y_0$, где x_0 , y_0 обозначают две постоянные величины. Поэтому все сводится к определению трех постоянных (интеграции) x_0 , y_0 и φ (или, вместо этой последней, $\lambda = \varphi/p$) таким образом, чтобы цепная линия проходила через точки A , B и дуга, отсекаемая этими двумя точками, имела заданную длину l .

Покажем, что эти условия однозначно определяют три постоянные.

Для этой цели возьмем опять оба уравнения (56), (57) в виде (56'), (57') и выполним в них указанную выше подстановку, после чего они примут вид

$$y - y_0 = \lambda \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{\lambda}, \quad s(x) = \lambda \operatorname{sh} \frac{x - x_0}{\lambda}, \quad (58)$$

где $s(x)$ обозначает криволинейную абсциссу на цепной линии, отсчитываемую от точки с абсциссой x_0 .

Мы всегда можем предположить, что A не выше B ; с другой стороны, мы можем взять начало координат в точке A , направляя ось x от A к B , так что, обозначив через a и b координаты, полученные таким образом для точки B и известные в качестве данных, будем иметь $a > 0$, $b \geq 0$ и (для того чтобы задача была возможна) $l^2 \geq a^2 + b^2$.

Условие, чтобы цепная линия прошла через точку A (с координатами $x = y = 0$), поскольку гиперболический косинус есть функция четная, дает уравнение

$$-y_0 = \lambda \operatorname{ch} \frac{x_0}{\lambda}; \quad (59)$$

при этом значении постоянной y_0 условие, чтобы цепная линия проходила также через точку B (с координатами a и b), принимает вид

$$b = \lambda \left(\operatorname{ch} \frac{a - x_0}{\lambda} - \operatorname{ch} \frac{x_0}{\lambda} \right). \quad (60)$$

С другой стороны, в силу определения функции $s(x)$, мы должны иметь

$$l = s(a) - s(0),$$

или, на основании второго из уравнений (58) и вследствие того, что гиперболический синус есть функция нечетная,

$$l = \lambda \left(\operatorname{sh} \frac{a - x_0}{\lambda} + \operatorname{sh} \frac{x_0}{\lambda} \right). \quad (61)$$

После этого, если возведем в квадрат равенства (60), (61), вычтем почленно первое из второго и примем во внимание известное тождество $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ и формулу сложения для гиперболического косинуса¹⁾, найдем

$$l^2 - b^2 = 2\lambda^2 \left(\operatorname{ch} \frac{a}{\lambda} - 1 \right). \quad (62)$$

1) Как известно, имеет место формула

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

что видно из соотношения

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1} e^{z_2} + e^{-z_1} e^{-z_2}}{2},$$

Положим для краткости

$$\frac{a}{2\lambda} = \xi$$

и обозначим через q^2 известную постоянную, не меньшую 1 (поскольку $l^2 \geq a^2 + b^2$),

$$\frac{l^2 - b^2}{a^2}.$$

На основании этих обозначений и тождества $\operatorname{ch} z - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 z/2$ равенство (62) принимает вид

$$\frac{\operatorname{sh}^2 \xi}{\xi} = q^2. \quad (62')$$

Соотношение (62') содержит только неизвестную ξ или, в конечном счете, горизонтальное натяжение φ , поскольку

$$\varphi = \frac{ap}{2\xi},$$

и так как φ и, следовательно, ξ — существенно положительные величины вместе с q , то равенство (62') эквивалентно равенству

$$\frac{\operatorname{sh} \xi}{\xi} = q. \quad (63)$$

Легко убедиться, что это уравнение однозначно определяет значение ξ . Действительно, припоминая определение гиперболического синуса и подставляя вместо показательных функций, входящих в его выражение, их разложения в степенные ряды по степеням ξ , найдем

$$\frac{\operatorname{sh} \xi}{\xi} = 1 + \frac{\xi^2}{3!} + \frac{\xi^4}{5!} + \frac{\xi^6}{7!} + \dots, \quad (64)$$

откуда следует, что функция в левой части равенства (63) при $\xi = 0$ принимает значение 1, а при $\xi \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности, постоянно возрастая. Поэтому она проходит один (и только один) раз через всякое значение $q > 1$. Определив таким образом значение ξ и, следовательно, $\lambda = a/2\xi$ из равенства (60) или (61), безразлично, будем иметь единственное значение для x_0 , после чего значение y_0 получится прямо из равенства (59).

Для вычисления ξ можно, например, прибегнуть к обращению ряда (64), что является законным для значений q , достаточно близких к 1, которые, именно, и встречаются в конкретных случаях.

если принять во внимание, что

$$e^{z_i} = \operatorname{ch} z_i + \operatorname{sh} z_i, \quad e^{-z_i} = \operatorname{ch} z_i - \operatorname{sh} z_i \quad (i = 1, 2).$$

Для $z_1 = z_2 = z/2$, принимая во внимание тождество $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, получим

$$\operatorname{ch} z - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}.$$

53. Остается вычислить натяжение. Для этой цели возьмем снова первое из уравнений (52), написав его в виде

$$T = \varphi \frac{ds}{dx} = \varphi \sqrt{1 + y'^2};$$

сопоставляя второе из уравнений (55) и уравнение (56), получим

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{p}{\varphi} y,$$

так что будем иметь

$$T = py, \quad (65)$$

т. е. натяжение в любой точке однородной цепной линии равно весу куска нити длиной, равной расстоянию точки от основания.

В частности, равенство (65) подтверждает то известное заранее свойство веревочной кривой, что натяжение является наименьшим в самой низшей ее точке V и имеет там значение φ (постоянная касательная составляющая натяжения); если рассматривается дуга цепной линии, концы которой A и B находятся на одинаковой высоте над основанием (и, следовательно, в силу предыдущего пункта симметричны относительно вертикали точки V), то натяжение достигает в них своего наибольшего значения, определяемого величиной py_0 , где y_0 есть общая им ордината. Если обозначим через τ это наибольшее натяжение, через f стрелу провеса $y_0 = \varphi/p$ дуги цепной линии (п. 49), то получим важную для приложений формулу

$$\tau = \varphi + pf. \quad (66)$$

54. Случай вольших натяжений. Заслуживает внимания случай, когда нить сильно натянута; под этим подразумевается, что постоянная φ (горизонтальная составляющая натяжения) велика по сравнению с полным весом pl нити.

Предположим, что отношение pa/φ (где a обозначает пролет, т. е. горизонтальную проекцию рассматриваемой веревочной кривой) достаточно мало для того, чтобы можно было пренебречь его четвертой степенью по сравнению с единицей.

Так как $a \leq l$, то указанное условие будет выполняться, если можно пренебречь величиной $(l/\varphi)^2$. Покажем, что, для того чтобы веревочную кривую можно было рассматривать как дугу параболы, достаточно, чтобы можно было пренебречь величиной $(pa/\varphi)^4$.

Действительно, если допустить, что концы A , B лежат по разные стороны от самой нижней точки нити (что обязательно будет иметь место, если они находятся на одном и том же уровне), то абсцисса x любой точки веревочной кривой по абсолютной величине будет меньше пролета a и даже не может превзойти $a/2$, если A и B находятся на одной и той же горизонтали.

Поэтому px/φ по абсолютной величине остается меньше pa/φ , так что вместо $e^{px/\varphi}$ можно подставить первые четыре члена разложения этой величины в ряд, пренебрегая остаточным членом, содержащим множитель $(px/\varphi)^4$. Подобным же образом можно разложить и функцию $e^{-px/\varphi}$.

Поступая таким образом, мы получим разложения

$$e^{px/\varphi} = 1 + \frac{px}{\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{px}{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{px}{\varphi} \right)^3,$$

$$e^{-px/\varphi} = 1 - \frac{px}{\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{px}{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{px}{\varphi} \right)^3$$

и приведем уравнение (56) цепной линии к виду

$$y = \frac{\varphi}{p} + \frac{p}{2\varphi} x^2; \quad (56')$$

это уравнение, очевидно, выражает параболу с вертикальной осью и с параметром p/φ , так что достаточно перенести начало координат в вершину, чтобы привести уравнение (56') к виду

$$y = \frac{p}{2\varphi} x^2.$$

За исключением лишь иного значения p , мы снова находим ту же самую параболу (48), которую мы получили в п. 47 как фигуру равновесия канатов всячего моста, в предположении непрерывно распределенной нагрузки. Если, в частности, рассматривается случай, когда два конца A, B находятся на одном и том же уровне, то длина l нити приблизительно выразится формулой (51), к которой и здесь можно было бы прийти прямым путем, подставляя в уравнение (57) вместо показательных функций только что указанные разложения их.

Что касается натяжения, то из уравнения (65), приняв во внимание уравнение (56'), можно вывести приближенное выражение

$$T = \varphi + \frac{p^2}{2\varphi} x^2,$$

которое, если написать его для концов ($x = \pm a/2$), дает наибольшее значение натяжения

$$\tau = \varphi + \frac{p^2 a^2}{8\varphi}. \quad (67)$$

В заключение отметим, что, в том случае, когда натяжение велико (pa мало по сравнению с φ), цепную линию можно приближенно рассматривать как параболу

$$y = \frac{p}{2\varphi} x^2,$$

отнесенную к осям с началом в самой нижней точке; если точки прикрепления находятся на одном и том же уровне, то стрела прогиба f , длина нити l и наибольшее натяжение определяются (через вес p единицы длины, пролет a и горизонтальную составляющую натяжения на концах φ) формулами (48') и (51) п. 49 и формулой (67)

$$f = \frac{pa^2}{8\varphi}, \quad l = a \left(1 + \frac{p^2 a^2}{24\varphi^2} \right), \quad \tau = \varphi + \frac{pa^2}{8\varphi}.$$

Из первого и третьего из этих равенств, очевидно, снова найдем равенство (66).

55. Между случаем нагрузки, пропорциональной длине элемента (однородная цепная линия), и случаем нагрузки, пропорциональной горизонтальной проекции элемента (висячий мост), по отношению к дифференциальным уравнениям (52) и (45') существует только одно различие: вместо величины p в первом случае, во втором входит величина $p dx/ds$. Если обозначим через θ угол наклона (к горизонту) касательной к веревочной кривой в любой ее точке, то dx/ds будет не что иное, как $\cos \theta$, так что разность между обеими нагрузками равна $p(1 - \cos \theta)$. Если нить натянута так сильно, что можно пренебречь членами второго порядка относительно θ , то можно пренебречь и величиной $1 - \cos \theta$, так что оба случая совпадают.

Таким образом, возможность замены, при данных обстоятельствах, дуги цепной линии дугой параболы можно было предвидеть на основании сравнения дифференциальных уравнений. Однако если мы хотим придать условиям заменяемости (как это делалось в предыдущем пункте) форму, непосредственно выводимую из практических данных вопроса, необходимо предварительно проинтегрировать дифференциальные уравнения.

§ 8. Естественные уравнения равновесия нитей и приложения

56. Возвратимся к общему случаю непрерывной нагрузки (пп. 38—43) и рассмотрим опять векторное уравнение

$$\frac{dT}{ds} + F = 0, \quad (42)$$

которое объединяет в себе условия равновесия. Полагая в нем $T = Tt$ (где t обозначает обычный единичный вектор касательной к веревочной кривой, ориентированный в сторону возрастания s) и принимая во внимание первую векторную формулу Френе (гл. I, п. 79), получим

$$\frac{dT}{ds} t + \frac{T}{r} n + F = 0,$$