отнесенную к осям с началом в самой нижней точке; если точки прикрепления находятся на одном и том же уровне, то стрела прогиба f, длина нити l и наибольшее натяжение определяются (через вес p единицы длины, пролет a и горизонтальную составляющую натяжения на концах φ) формулами (48′) и (51) п. 49 и формулой (67)

$$f=\frac{pa^2}{8\varphi}, \quad l=a\left(1+\frac{p^2a^2}{24\varphi^2}\right), \quad \tau=\varphi+\frac{pa^2}{8\varphi}.$$

Из первого и третьего из этих равенств, очевидно, снова найдем равенство (66).

55. Между случаем нагрузки, пропорциональной длине элемента (однородная цепная линия), и случаем нагрузки, пропорциональной горизонтальной проекции элемента (висячий мост), по отношению к дифференциальным уравнениям (52) и (45′) существует только одно различие: вместо величины p в первом случае, во втором входит величина $p\,dx/ds$. Если обозначим через θ угол наклона (к горизонту) касательной к веревочной кривой в любой ее точке, то dx/ds будет не что иное, как $\cos\theta$, так что разность между обеими нагрузками равна $p(1-\cos\theta)$. Если нить натянута так сильно, что можно пренебречь членами второго порядка относительно θ, то можно пренебречь и величиной $1-\cos\theta$, так что оба случая совпадают.

Таким образом, возможность замены, при данных обстоятельствах, дуги цепной линии дугою параболы можно было предвидеть на основании сравнения дифференциальных уравнений. Однако если мы хотим придать условиям заменяемости (как это делалось в предыдущем пункте) форму, непосредственно выводимую из практических данных вопроса, необходимо предварительно проинтегрировать дифференциальные уравнения.

§ 8. Естественные уравнения равновесия нитей и приложения

56. Возвратимся к общему случаю непрерывной нагрузки (пп. 38—43) и рассмотрим опять векторное уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}+\boldsymbol{F}=0, \tag{42}$$

которое объединяет в себе условия равновесия. Полагая в нем $\boldsymbol{T}=T\boldsymbol{t}$ (где $\boldsymbol{t}$ обозначает обычный единичный вектор касательной к веревочной кривой, ориентированный в сторону возрастания s) и принимая во внимание первую векторную формулу Френе (гл. I, п. 79), получим

$$\frac{dT}{ds}\boldsymbol{t}+\frac{T}{r}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{F}=0,$$

где r обозначает радиус кривизны веревочной кривой и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по главной нормали и ориентированный от любой точки кривой к соответствующему центру кривизны.

Если спроектируем предыдущее векторное уравнение на три ребра естественного трехгранника (касательную, главную нормаль и бинормаль, ориентированные согласно условиям, принятым в гл. I) и обозначим через F_t, F_n, F_b соответствующие проекции силы, отнесенной к единице длины, то придем к трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dT}{ds}+F_t=0, \qquad \frac{T}{r}+F_n=0, \qquad F_b=0, \tag{68}$$

которые носят название *внутренних*, или *естественных уравнений равновесия* гибкой и нерастяжимой нити. Из третьего уравнения прямо следует, что *при равновесии линия действия силы, отнесенной к единице длины, во всякой точке веревочной кривой* лежит в соответствующей соприкасающейся плоскости.

57. Нить, натянутая на гладкой поверхности. Применим естественные уравнения (68) к изучению фигуры равновесия нити, натянутой на какой-нибудь поверхности силами, приложенными к концам нити. Здесь силы, непрерывно распределенные вдоль нити, представляют собой реакции опоры, если можно отвлечься от веса, т. е. если вес (полный) можно считать весьма малым по сравнению с растягивающими усилиями, приложенными к концам.

В рассматриваемом нами идеальном случае гладкой поверхности все элементарные реакции нормальны к ней; с другой стороны, реакция, отнесенная к единице длины, во всякой точке веревочной кривой, как мы видели в предыдущем пункте, должна лежать в соприкасающейся плоскости к кривой; отсюда можно заключить, что *во всякой точке веревочной кривой соприкасающаяся плоскость нормальна к поверхности опоры.*

Напомним теперь, что кривые, лежащие на поверхности и имеющие то свойство, что во всякой их точке соприкасающаяся плоскость нормальна к поверхности, называются *геодезическими линиями.* Полезно обратить внимание на то, что определенные таким образом кривые характеризуются также и тем свойством, что каждая из них представляет собой кратчайшую линию на поверхности между любыми двумя точками кривой (не слишком удаленными друг от друга). Например, на сфере геодезические линии представляют собой окружность больших кругов; каждая дуга такой окружности, меньшая полуокружности, представляет собой кратчайшую линию на сфере между соответствующими концами. В более общем случае поверхности вращения всякий меридиан является геодезической линией (но, конечно, нельзя сделать обратного заключения): действительно, на поверхности вращения нормаль к поверхности в какой-нибудь ее точке лежит в соответствующей меридианной плоскости, которая является соприкасающейся плоскостью меридиана, проходящего через эту точку. Таким образом, для цилиндра геодезическими линиями будут винтовые линии (и, в частности, образующие и окружности нормальных сечений).

Возвращаясь после этого краткого отступления к нашей задаче, мы можем сформулировать полученный немного ранее результат так:

Нить, натянутая на гладкой поверхности и подвергающаяся действию активных сил только на концах, располагается по геодезической линии этой поверхности. Таким образом, натянутая нить, если она не слишком длинна (не превышает половины окружности большого круга в случае сферы), отмечает на поверхности самый короткий путь от одного ее конца до другого.

Кроме того, при равновесии реакция во всякой точке будет нормальной к поверхности, и потому $F_t = 0$, а из первого из уравнений (68) следует, что

$$T = \text{const},$$

т. е. *натяжение передается неизменным от одного конца нити к другому*; в частности, на концах нити ($s = 0$ и $s = l$) имеем

$$T(0) = T(l),$$

так же как и в случае свободной нити, находящейся под действием только двух сил, приложенных к ее концам.

58. Результаты предыдущего пункта позволяют понять, как происходит передача сил посредством нитей, блоков и грузов, к которым мы уже обращались несколько раз, допуская, что в первом приближении натяжение нити на одном конце равно весу груза, подвешенного к другому концу (гл. VII, п. 13; гл. IX, п. 2). Теперь мы можем сказать, что это было бы строго справедливо в идеальном случае свободной или расположенной на *гладкой* поверхности нити, на которую *не действуют другие активные силы.*

Приближенно это заключение будет оставаться верным, если можно пренебречь:

1) силой, отнесенной к единице длины нити (по сравнению с силами, действующими на концах), и

2) силами, происходящими от трения в опорах.

Следует, однако, заметить, что, вообще, влиянием трения далеко не всегда можно пренебречь и что, напротив, во многих практически важных случаях влияние трения может быть весьма существенным, как мы это покажем на одном примере в пп. 60, 61.

59. Останавливаясь на общих соображениях, отметим одно непосредственное следствие естественных уравнений (68) в случае консервативных сил. Если $U(x, y, z)$ есть потенциал силы $\boldsymbol{F}$, то для любого элементарного перемещения dP будем иметь

$$dU = \boldsymbol{F} \cdot dP$$

и, следовательно, в частности, для перемещения вдоль веревочной кривой $dP = \boldsymbol{t}\, ds$

$$dU = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = F_t\, ds.$$

Поэтому первое из уравнений (68) в этом случае можно написать в виде

$$\frac{d(T+U)}{ds} = 0,$$

откуда следует, что

$$T + U = \text{const}, \tag{69}$$

т. е. если силы консервативны, то натяжение нити отличается только на постоянную от потенциала, взятого с обратным знаком. Оно, следовательно, определено как функция от положения, независимо от знания веревочной кривой. В частности, если известны положения концов нити и значение натяжения в одном из них [что определяет постоянную в правой части уравнения (69)], то этим определяется и значение натяжения на другом конце.

Так, например, в случае однородной цепной линии (пп. 50—55) вес p единицы длины относительно принимаемых нами осей имеет потенциал $-py$, так что на основании уравнения (69) для натяжения будем иметь выражение

$$T = py + \text{const};$$

достаточно заметить, что в самой нижней точке $T = \varphi$, $y = \varphi/p$, чтобы заключить, что постоянная равна нулю. Таким образом, мы опять приходим к равенству

$$T = py,$$

которое уже получили в п. 53.

60. Трение нити, расположенной на шероховатой поверхности. В п. 57 мы видели, что если нить, растягиваемая двумя силами $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$, приложенными к концам A и B, лежит на гладкой поверхности и не подвергается действию других внешних сил, то натяжение T в статических условиях постоянно вдоль нити, так что для равновесия требуется, чтобы обе силы $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ имели одинаковую величину; достаточно малейшего изменения величины одной из них для того, чтобы равновесие было нарушено.

Это теоретическое заключение вполне объясняет, как это отмечалось в п. 58, действие нитей в экспериментальных лабораторных установках; но на практике мы встречаемся также с бесчисленным множеством примеров материальных систем, которые можно уподобить нитям (веревки, канаты, цепи и т. д.), расположенным или навернутым на другие тела и удерживаемым в равновесии силами, приложенными к концам и далекими от того, чтобы иметь равные величины. Если канат намотан на столб, стоящий на берегу реки, то при достаточном числе витков силой одного человека, приложенной к концу каната, можно воспрепятствовать большой барже плыть по течению реки.

В таких случаях равновесие, которое при отсутствии трения теоретически было бы невозможным, обусловливается трением нити о поверхность, на которую она опирается или навернута, т. е. мы встречаемся с обстоятельствами, подобными тем, которые мы иллюстрировали в п. 17 предыдущей главы примером лестницы.

Для исследования равновесия в таких случаях обратимся опять к естественным уравнениям

$$F_t + \frac{dT}{ds} = 0, \quad F_n + \frac{T}{r} = 0, \quad F_b = 0 \tag{68}$$

и предположим, что активные силы действуют только на концах нити; тогда $\boldsymbol{F}$ будет представлять собой неизвестную силу, с которой поверхность σ действует на единицу длины нити. Отбросим, кроме того, предположение об отсутствии трения. В этом случае, ввиду того что реакция $\boldsymbol{F}$ не необходимо нормальна к σ, касательная составляющая F_t может быть, и вообще говоря, будет отличной от нуля; поэтому, на основании первого из уравнений (68), то же самое будет иметь место и для dT/ds, так что натяжение будет, вообще говоря, изменяться вдоль нити. Задача, которую мы здесь будем рассматривать, и заключается в том, чтобы оценить в статических условиях возможную разность между растягивающими усилиями T_A и T_B на концах, или, что одно и то же, разность между величинами $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ сил, приложенных к концам нити.

Для этой цели необходимо определить реакцию $\boldsymbol{F}$, отнесенную к единице длины нити, как функцию s. Для простоты мы ограничимся здесь рассмотрением частного (и как увидим, особенно интересного) случая, когда нить располагается на поверхности σ вдоль геодезической линии, т. е. вдоль одной из таких кривых, которые дают возможные конфигурации равновесия и при отсутствии трения.

Главная нормаль к веревочной кривой совпадает в этом случае с нормалью к поверхности (п. 57), так что составляющая F_n тождественна с нормальной реакцией поверхности. Кроме того, так как $F_b = 0$, то проекция силы $\boldsymbol{F}$ на касательную плоскость, т. е. сила трения (отнесенная к единице длины), направлена по касательной к веревочной кривой и поэтому совпадает с F_t.

Рассматривая всякий элемент ds нити, расположенной на поверхности σ, как материальную точку, находящуюся в равновесии на шероховатой поверхности, вспомним, что реакция такой поверхности может быть направлена только во внешнюю для тела часть пространства и не должна лежать вне соответствующей полости конуса трения.

Теперь из второго из уравнений (68) следует, что, для того чтобы натяжение T было положительным, должно быть $F_n < 0$; это, так как реакция $\boldsymbol{F}$, как мы видели, может быть направлена только во внешнюю для тела часть пространства, означает, что главная нормаль к веревочной кривой (направленная к центру кривизны) направлена внутрь тела, или, другими словами, веревочная кривая обращена во всякой своей точке вогнутостью к телу, ограничиваемому поверхностью σ.

Другое условие для реакции, указанное ранее, выражается соотношением

$$|F_t| \leqslant f |F_n|,$$

где f обозначает коэффициент трения. Отсюда, принимая во внимание естественные уравнения (68), заключаем, что при равновесии нити между натяжением и его дифференциалом должно существовать соотношение

$$|dT| \leqslant f \frac{T}{r} |ds|. \tag{69'}$$

Полезно отметить, что, при сделанных предположениях, неопределенные уравнения равновесия по существу приводятся к соотношению (69′). Действительно, достаточно, чтобы оно удовлетворялось, для того чтобы существовала реакция поверхности σ [величина $\boldsymbol{F}$, определяемая из уравнений (68)], способная обеспечить равновесие каждого элемента нити.

Из соотношения (69) мы снова находим, что предположение $f = 0$ влечет за собой равенство $dT/ds = 0$, или же $T = \text{const}$; при произвольном f соотношение (69′) показывает, что натяжение должно изменяться мало и при прочих равных условиях будет изменяться тем менее, чем меньше будет f.

61. Определим теперь наибольшее значение разности между натяжениями T_A и T_B на концах, при которой еще возможно равновесие.

Для этой цели условимся, во-первых, считать положительной дугу s, отсчитываемую от A к B, и, во-вторых, заметим, что, если имеется сумма конечного числа слагаемых $\sum_{i=1}^{n} a_i$, не зависимых между собой и таких, что каждое a_i может быть как положительным, так и отрицательным, но не может превзойти по абсолютной величине некоторого максимума m_i, то рассматриваемая сумма будет иметь наибольшее значение по абсолютной величине только тогда, когда слагаемые или все положительны, или все отрицательны и каждое достигает соответствующего максимума абсолютной величины. Это замечание мы можем применить к нашему случаю, переходя к пределу и принимая во внимание, что разность $T_B - T_A$ есть сумма элементов dT на отрезке нити от A до B. При наибольшем значении разности $T_B - T_A$ мы должны иметь в силу соотношения (69′)

$$dT = \pm f \frac{T}{r} ds,$$

где вдоль всей нити будет или знак плюс или знак минус. Мы можем предположить, что имеем знак плюс (т. е. что натяжение возрастает, когда мы идем вдоль нити в направлении от A к B), так как в противном случае достаточно изменить положительное направление отсчета дуг на нити. При этом предположении, разделив обе части предыдущего равенства на T и проинтегрировав от A до B, получим

$$\ln \frac{T_B}{T_A} = \int\limits_{AB} f \frac{ds}{r}, \tag{70}$$

в то время как в случае, когда имеем знак минус, будет существовать аналогичная формула, которая получается из предыдущей, если мы в левой части заменим T_A на T_B.

Это и есть соотношение, которое должно существовать между натяжениями T_A и T_B при наибольшей разности этих натяжений (совместной с равновесием). Если натяжение на одном из концов, например T_A, задано, то тем самым T_B будет однозначно определено и, следовательно, будет также определено и численное значение указанной выше наибольшей разности натяжений.

Особенно интересен случай веревки, навернутой по дуге окружности на круглый цилиндр. Радиус кривизны r совпадает тогда с радиусом цилиндра, и если обозначим через θ центральный угол, заключенный между A и B (считаемый положительным от A к B), то ds будет равно $r d\theta$. Предполагая f постоянным, из уравнения (70) получим

$$\ln \frac{T_B}{T_A} = f\theta, \tag{71}$$

или

$$\frac{T_B}{T_A} = e^{f\theta}. \tag{71′}$$

Отсюда мы видим, что наибольшее отношение натяжений, допустимое без нарушения равновесия, зависит от величины угла θ, но не от радиуса цилиндра.

Так как показательная функция $e^{f\theta}$ растет очень быстро, то достаточно обернуть веревку вокруг цилиндра небольшое число раз для того, чтобы могло существовать равновесие при огромной разнице между натяжениями.

Пусть, например, $f = {}^1/_3$ и требуется намотать веревку на горизонтальный цилиндр таким образом, чтобы весом в 1 *кг*, приложенным к одному концу веревки, уравновесить груз в 1 *т*, подвешенный на другом конце веревки. Вследствие равенства (71) необходимо, чтобы $f\theta$ было равно, по крайней мере, $\ln 1000$; так как отношение между десятичным логарифмом (который мы будем обозначать lg) и натуральным логарифмом одного и того же числа есть 0,434..., достаточно будет принять

$$\theta \geqslant 3\,\frac{\lg 1000}{0{,}434} = \frac{9}{0{,}434} = 20{,}7.$$

Так как каждому витку соответствует угол 2π, то число необходимых витков будет $\geqslant 20{,}7/2\pi = 20{,}7/6{,}28$; таким образом, при четырех витках цель будет достигнута с избытком.

§ 9. Равновесие тонких стержней

62. Мы назвали материальной линией (гл. X, п. 5) всякое тело, одно измерение которого настолько преобладает над остальными, что конфигурация системы может достаточно хорошо определяться какой-нибудь одной его внутренней кривой, называемой *направляющей*. Известным примером материальных линий являются гибкие и нерастяжимые нити, которые мы рассматривали в предыдущих параграфах. При изучении вопросов их равновесия мы пренебрегали поперечными размерами нити не только с точки зрения геометрической конфигурации, но также и при оценке действия приложенных сил. Действительно, рассматривая силы, под действием которых находится часть материальной линии, соответствующая любому элементу ds направляющей, мы считали, что их можно заменить одной силой Fds, приложенной в какой-нибудь точке P элемента дуги ds. В действительности эта сила заменяет силы, приложенные в различных точках Q рассматриваемого элемента материальной линии. В таких случаях, при поперечных размерах, достаточно малых для того, чтобы с геометрической точки зрения тело можно было рассматривать как линию, с физической точки зрения может оказаться незаконным при оценке действия сил отождествлять все точки Q рассматриваемого материального элемента с точкой P, т. е. пренебрегать моментами относительно точки P (а вместе с ними и результирующим моментом) сил, приложенных в различных точках Q.

Здесь мы дадим краткие указания о постановке названной статической задачи, когда учитываются и эти моменты приложенных сил.