

для того, чтобы могло существовать равновесие при огромной разнице между натяжениями.

Пусть, например, $f = 1/3$ и требуется намотать веревку на горизонтальный цилиндр таким образом, чтобы весом в 1 кг, приложенным к одному концу веревки, уравновесить груз в 1 т, подвешенный на другом конце веревки. Вследствие равенства (71) необходимо, чтобы $f\theta$ было равно, по крайней мере, $\ln 1000$; так как отношение между десятичным логарифмом (который мы будем обозначать \lg) и натуральным логарифмом одного и того же числа есть 0,434..., достаточно будет принять

$$\theta \geq 3 \frac{\lg 1000}{0,434} = \frac{9}{0,434} = 20,7.$$

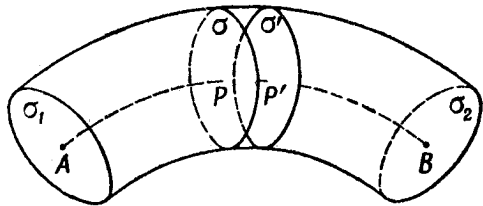
Так как каждому витку соответствует угол 2π , то число необходимых витков будет $\geq 20,7/2\pi = 20,7/6,28$; таким образом, при четырех витках цель будет достигнута с избытком.

§ 9. Равновесие тонких стержней

62. Мы назвали материальной линией (гл. X, п. 5) всякое тело, одно измерение которого настолько преобладает над остальными, что конфигурация системы может достаточно хорошо определяться какой-нибудь одной его внутренней кривой, называемой *направляющей*. Известным примером материальных линий являются гибкие и нерастяжимые нити, которые мы рассматривали в предыдущих параграфах. При изучении вопросов их равновесия мы пренебрегали поперечными размерами нити не только с точки зрения геометрической конфигурации, но также и при оценке действия приложенных сил. Действительно, рассматривая силы, под действием которых находится часть материальной линии, соответствующая любому элементу ds направляющей, мы считали, что их можно заменить одной силой Fds , приложенной в какой-нибудь точке P элемента дуги ds . В действительности эта сила заменяет силы, приложенные в различных точках Q рассматриваемого элемента материальной линии. В таких случаях, при поперечных размерах, достаточно малых для того, чтобы с геометрической точки зрения тело можно было рассматривать как линию, с физической точки зрения может оказаться незаконным при оценке действия сил отождествлять все точки Q рассматриваемого материального элемента с точкой P , т. е. пренебрегать моментами относительно точки P (а вместе с ними и результирующим моментом) сил, приложенных в различных точках Q .

Здесь мы дадим краткие указания о постановке названной статической задачи, когда учитываются и эти моменты приложенных сил.

63. Отвлекаясь сначала от предположения, что речь идет о материальной линии, рассмотрим тело S какой угодно физической структуры, и допустим, что геометрическая конфигурация тела может быть определена плоской площадкой σ (фиг. 68), которая, изменяясь по величине и по форме, движется, описывая своей внутренней точкой P некоторую дугу AB (направляющая) и оставаясь во всяком своем положении нормальной к этой кривой. Обозначим через σ_1 , σ_2 элементарные площадки на концах A и B , обе нормальные, по предположению, к направляющей. Если допустим, для простоты, что каждое сечение тела, нормальное к направляющей, пересекает эту кривую только в одной точке, то сечение, проведенное через любую точку P направляющей, можно определить длиной s дуги AP , отсчитываемой в направлении от A к B , принимаемом за положительное.



Фиг. 68.

После этого представим себе, что тело S удерживается в равновесии некоторыми силами, приложенными в точках площадок σ_1 ,

σ_2 , и некоторой системой непрерывно распределенных сил, действующих на тело; обозначим через F_A и F_B результирующие силы, приложенных соответственно к площадкам σ_1 , σ_2 , и через M_A , M_B соответствующие результирующие моменты относительно точек A и B .

Что же касается непрерывно распределенных сил, то мы будем предполагать, что они приложены к каждому материальному элементу тела и имеют порядок элемента массы, или, что одно и то же, порядок элемента объема (*массовая сила*), как, например, для силы тяжести.

Если рассмотрим в теле S любой *элементарный слой*, т. е. часть тела, заключенную между двумя нормальными сечениями σ , σ' , соответствующими точками P и $P' = P + ds$ направляющей с криволинейными абсциссами s и $s + ds$, то силы, прямо приложенные к материальным элементам слоя, приведутся к результирующей силе, приложенной в точке P , и результирующему моменту относительно P , которые после выполнения интегрирований по конечной площади σ принимают вид $F ds$ и $M ds$, где F и M обозначают два определенных конечных вектора, представляющих собой функции дуги s . Подобно тому как мы условились в случае нитей в п. 38, мы будем называть эти два вектора, характеризующие совокупность активных сил, действующих на элементарный слой, смежный с P , *результирующей силой и результирующим моментом системы сил, отнесенными к единице длины направляющей, в точке P .*

Но при равновесии на каждый элементарный слой, помимо активных сил с результирующей силой $F ds$ и результирующим моментом (относительно P) $M ds$, действуют силы, приложенные к площадкам σ и σ' и происходящие от соприкосновения со смежными слоями, если рассматриваемый слой не является одним из двух крайних слоев; в этом последнем случае площадка σ_1 или σ_2 подвергается соответственно действию F_A , M_A или F_B , M_B . Чтобы точнее описать силы, происходящие от соприкосновения с соседними элементами, рассмотрим любое нормальное (промежуточное) сечение σ . При равновесии благодаря действию заданных активных сил в сечении σ возбуждаются внутренние молекулярные силы, с которыми часть PB тела, или, точнее, ее материальные элементы, непосредственно прилегающие к σ , действуют на отдельные поверхностные элементы σ . Сила, приложенная таким образом к произвольному элементу поверхности σ , представляет собой бесконечно малую величину одного и того же порядка с элементом поверхности (*поверхностная сила*). Интегрируя по всей конечной площадке σ , мы получим для усилий, действующих на площадку σ со стороны части PB тела S , некоторую результирующую силу Φ и некоторый результирующий момент Γ относительно точки P , представляющие собой конечные функции дуги s . Векторы Φ и Γ называются соответственно *результирующим усилием* и *результирующим моментом усилий* в точке P ; составляющая усилия Φ , касательная к направляющей (и, следовательно, нормальная к площадке σ), и составляющая, расположенная в плоскости σ , соответственно называются *нормальным усилием* и *перерезывающим усилием*; аналогичные составляющие результирующего момента усилий Γ называются *крутящим моментом* и *изгибающим моментом*.

Обращаясь теперь к усилиям, испытываемым частью PB тела в сечении σ вследствие соединения ее с частью AP , заметим, что усилие, действующее на всякий поверхностный элемент площадки σ , на основании принципа равенства действия и противодействия прямо противоположно усилию, с которым действует на тот же самый поверхностный элемент часть PB ; поэтому результирующая сила и результирующий момент (относительно точки P) усилий, с которыми действует часть AP тела на площадь сечения σ , будут равны и прямо противоположны $\Phi(s)$ и $\Gamma(s)$.

64. Теперь мы можем написать, исходя из основных уравнений, *локальные условия* (необходимые) *равновесия*, т. е. условия, относящиеся к отдельному элементарному слою. Рассматривая сначала неопределенные уравнения, обратимся к какому-нибудь слою, лежащему внутри тела S . В число внешних для слоя сил входят, помимо активных сил с результирующей силой $F ds$ и результирующим моментом (относительно P) $M ds$, усилия, испытываемые

слоем на обеих площадках σ и σ' вследствие его соединения с частями тела AP , $P'B$. Соответствующими результирующими усилиями, на основании сказанного в предыдущем пункте, будут $\Phi(s)$ и $\Phi(s+ds)$, так что первое основное уравнение будет иметь вид

$$\Phi(s+ds) - \Phi(s) + F ds = 0,$$

или

$$\frac{d\Phi}{ds} + F = 0. \quad (72)$$

Для того чтобы написать второе основное уравнение, заметим, что $\Gamma(s)$ есть результирующий момент относительно точки P усилий, испытываемых площадкой σ , в то время как $\Gamma(s+ds)$ — результирующий момент относительно точки P' усилий, испытываемых площадкой σ' , так что результирующий момент этих усилий относительно точки P будет равен (гл. I, п. 32)

$$\Gamma(s+ds) + dP \times \Phi(s+ds).$$

Приравнивая нулю результирующий момент относительно точки P всех внешних сил, действующих на слой, получим второе основное уравнение

$$\Gamma(s+ds) - \Gamma(s) + dP \times \Phi(s+ds) + M ds = 0;$$

разделив обе части на ds и перейдя затем к пределу при $ds \rightarrow 0$, получим

$$\frac{d\Gamma}{ds} + t \times \Phi(s) + M = 0, \quad (73)$$

где $t = dP/ds$ означает единичный вектор, касательный к направляющей, ориентированной в сторону возрастающих s , т. е. от A к B .

Для определения условий на концах достаточно повторить предыдущие рассуждения для двух крайних слоев: так, например, если обратимся к слою, заключенному между крайней площадкой σ_1 , проходящей через точку A , и сечением σ' , проходящим через точку $A+ dA$, то, приравнивая нулю результирующую силу и результирующий момент относительно точки A внешних сил, действующих на слой, получим

$$F_A + F(0) ds + \Phi(ds) = 0,$$

$$M_A + \Gamma(ds) + dA \times \Phi(ds) + M(0) ds = 0;$$

переходя к пределу, при $ds \rightarrow 0$, будем иметь

$$F_A + \Phi(0) = 0, \quad M_A + \Gamma(0) = 0. \quad (74')$$

Таким же образом для крайней площадки, проходящей через точку B , обозначая через l длину дуги AB направляющей, найдем

$$F_B - \Phi(l) = 0, \quad M_B - \Gamma(l) = 0. \quad (74'')$$

65. Уравнения (72), (73), (74) [т. е. (74') и (74'')] представляют собой обобщения уравнений (42), (43) п. 40, относящихся к гибким и нерастяжимым нитям. Они даже сводятся к ним, когда моменты M , Γ , M_A и M_B тождественно равны нулю и, кроме того, усилие Φ действует по касательной к направляющей, так как в этом случае уравнение (72) и первые из уравнений (74') и (74'') совпадают соответственно с уравнениями (42), (43), в то время как уравнение (73) и вторые из уравнений (74'), (74'') будут выполняться тождественно.

Однако между этими двумя случаями имеются существенные различия, на которых не бесполезно коротко остановиться в этом и следующем пунктах.

В то время как уравнения (42), (43) в силу характеристического постулата для гибких и нерастяжимых нитей (пп. 34, 40), необходимы и достаточны для равновесия, уравнения (72), (74) только необходимы; это станет ясным, если мы вспомним, что при их выводе мы ограничились выражением того, чтобы удовлетворялись основные условия для всякого элементарного слоя тела S . Этот слой должен рассматриваться не как материальная точка, а как деформируемая система, и потому о равновесии его нельзя судить на основании одних только суммарных величин (резльтирующей силы и результирующего момента активных сил), входящих в уравнения (72)—(74). Таким образом, эти уравнения обеспечивают только возможность, но не действительное существование равновесия.

Уравнения (72), (73) содержат, как и уравнение (42) в случае нитей (п. 40), основные уравнения для всякой конечной части тела S_2 , заключенной между двумя любыми нормальными сечениями σ' , σ'' . К этому выводу можно прийти, исходя из самого способа, посредством которого были получены уравнения (72), (73), но его также легко проверить и непосредственно. Если P' и P'' суть точки направляющей, соответствующие нормальным сечениям σ' , σ'' , и s' , s'' — их криволинейные абсциссы, то прежде всего, интегрируя равенство (40) вдоль направляющей от P' до P'' , имеем уравнение

$$\Phi(s'') - \Phi(s') + \int_{s'}^{s''} F ds = 0,$$

которое и выражает обращение в нуль результирующей всех внешних сил, действующих на рассматриваемую часть тела S .

Что же касается результирующего момента всех внешних сил, который мы для определенности будем вычислять относительно точки P' , то вспомним прежде всего, что для сил, прямо приложенных к слою, соответствующему любой точке P с криволинейной абсциссой s , результирующий момент относительно точки P может

быть обозначен через $\mathbf{M}(s) ds$ и на основании уравнения (73) должен удовлетворять уравнению

$$\mathbf{M} ds + d\Gamma + dP \times \Phi = 0. \quad (73')$$

Результирующий момент всех прямо приложенных сил относительно точки P определяется равенством

$$\mathbf{M}' ds = [\mathbf{M} + P'\vec{P} \times \mathbf{F}] ds.$$

Исключая \mathbf{M} посредством уравнения (73') и принимая во внимание уравнение (72), получим

$$\mathbf{M}' ds + d\Gamma + dP \times \Phi + P'\vec{P} \times d\Phi = 0,$$

или

$$\mathbf{M}' ds + d\Gamma + d\{P'\vec{P} \times \Phi\} = 0.$$

Отсюда, интегрируя вдоль направляющей от P' до P'' , получим уравнение

$$\int_{s'}^{s''} \mathbf{M}' ds - \Gamma(s') + \{\Gamma(s'') + P'\vec{P}'' \times \Phi(s'')\} = 0,$$

которое и выражает то, что результирующий момент относительно точки P' всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой части тела S , равен нулю.

66. Отметим теперь другую существенную разницу между уравнениями равновесия нити и уравнениями (72)—(74).

Первые, как мы видели, определяют фигуру равновесия нити, когда заданы внешние силы вдоль нити и условия на концах (типичный случай: нить, закрепленная на концах).

Вместо этого неопределенные уравнения (72), (73) дают шесть скалярных уравнений между силами, конфигурацией и усилиями, представляемыми в их совокупности двумя векторами $\Phi(s)$ и $\Gamma(s)$, каждый из которых имеет три проекции, так что уравнения (72), (73), дополненные условиями на концах (74), достаточны для определения этих двух векторов в зависимости от задаваемых как угодно сил и конфигурации равновесия.

Интуитивные физические соображения приводят к заключению, что конфигурация равновесия определяется внешними силами и условиями на концах, если только задана материальная природа системы, как это, например, можно заметить в случае металлического стержня, заделанного на одном конце и подвергающегося действию заданной системы сил на другом.

Отсюда следует, что, для того чтобы рассматриваемую нами статическую задачу представить в виде, отвечающем физической интуиции, необходимо помимо сил (и условий на концах) задать

материальную структуру системы и вывести из нее некоторое дальнейшее относящееся к усилиям условие, которое вместе с системой уравнений (72), (73), (74) даст возможность определить в функции указанных выше данных конфигурацию равновесия.

В общем виде эта задача решается в теории упругости. Однако уже в случае гибких и нерастяжимых нитей мы имели первый пример такой физической постановки задачи; теперь в качестве прямой иллюстрации предыдущих рассуждений мы рассмотрим один типичный случай, в котором вместо двух лишних векторов, входящих в систему (72)—(74), имеется лишь один.

67. Тонкие стержни. Рассмотрим тело с криволинейной направляющей, равновесие которого мы изучали в предыдущих пунктах, и предположим, что наибольшее измерение h его нормальных сечений σ сравнимо с элементом дуги ds направляющей, в том смысле, что может рассматриваться наравне с ним как величина первого порядка. Такое тело в отношении геометрической конфигурации можно рассматривать как материальную линию. Что же касается нагрузок и вызываемых ими усилий, то мы будем считать, что, несмотря на малость поперечных сечений, нужно принимать во внимание также и моменты. Материальная система, определяемая таким образом, носит название тонкого стержня.

Для равновесия тонкого стержня будут иметь уравнения (72)—(74) п. 64, из которых для удобства мы перепишем здесь неопределенные уравнения

$$\frac{d\Phi}{ds} + F = 0, \quad (72)$$

$$\frac{d\Gamma}{ds} + t \times \Phi + M = 0. \quad (73)$$

Но если, как обычно, в качестве типичной активной силы берется вес, то мы приходим к предположению о внешних силах, которое допускает замечательное упрощение уравнений (74') и (74''). Именно, руководствуясь поведением силы тяжести, допустим, что величина результирующей $F ds$ всех сил f , действующих на различные элементы элементарного слоя тонкого стержня, будет того же самого порядка, что и сумма $\Sigma |f|$ их абсолютных значений¹⁾. Тогда соответствующий результирующий момент $M ds$ (относительно точки P , определяющей положение слоя на направляющей) будет иметь порядок величины $\Sigma |f| \delta$, где величина δ не должна превосходить наибольшего значения h поперечного сечения тонкого стержня, так что вектор $M ds$ будет сравним по величине с $F h ds$. Так как величина h предполагается достаточно малой для того, чтобы ее можно было рассматривать как величину того же порядка,

¹⁾ Заметим, что аналогичное предположение об усилиях Φ оказалось бы незаконным.

что и ds , то заключаем, что M будет того же порядка, что и $F ds$, или, на основании уравнения (72), того же порядка, что и $d\Phi$. Если мы допустим, в согласии с характером задачи, что изменение усилия Φ на толщине ds любого слоя, т. е. вектор $d\Phi$, весьма мало по сравнению с самим усилием Φ , то вектор M (который будет порядка $d\Phi$) можно считать весьма малым по сравнению с $t \times \Phi$ (порядка Φ). Таким образом, в уравнении (73) надо положить $M = 0$, благодаря чему уравнения равновесия стержня приводятся к виду

$$\frac{d\Phi}{ds} + F = 0, \quad \frac{d\Gamma}{ds} + t \times \Phi = 0; \quad (75)$$

в эти уравнения, как уже было указано в конце предыдущего пункта, входят только три вектора F , Φ и Γ . Естественно, что условия на концах сохраняют вид уравнений (74'), (74'').

68. Если мы отнесем неопределенные уравнения (75) предыдущего пункта к естественному трехграннику t, n, b направляющей кривой, то получим так называемые *внутренние*, или *естественные уравнения*, аналогичные уравнениям (68) п. 56, относящимся к нитям. Положив

$$\Phi = \Phi_1 t + \Phi_2 n + \Phi_3 b, \quad \Gamma = \Gamma_1 t + \Gamma_2 n + \Gamma_3 b$$

и приняв во внимание формулы Френе (гл. I, п. 79) и очевидное тождество

$$t \times \Phi = \Phi_2 b - \Phi_3 n,$$

мы найдем, что уравнения (75) перейдут в шесть скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{ds} - c\Phi_2 + F_t &= 0, & \frac{d\Gamma_1}{ds} - c\Gamma_2 &= 0, \\ \frac{d\Phi_2}{ds} + c\Phi_1 + \tau\Phi_3 + F_n &= 0, & \frac{d\Gamma_2}{ds} + c\Gamma_1 + \tau\Gamma_3 - \Phi_3 &= 0, \\ \frac{d\Phi_3}{ds} - \tau\Phi_2 + F_b &= 0, & \frac{d\Gamma_3}{ds} - \tau\Gamma_2 + \Phi_2 &= 0; \end{aligned}$$

когда мы имеем тонкий стержень с плоской направляющей, относительно плоскости которой можно считать симметричными как активные силы, так и силы молекулярного взаимодействия, внутренние уравнения приводятся к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{ds} - c\Phi_2 + F_t &= 0, \\ \frac{d\Phi_2}{ds} + c\Phi_1 + F_n &= 0, \\ \frac{d\Gamma_3}{ds} + \Phi_2 &= 0, \end{aligned}$$

так как в этом случае $\tau = 0$, $F_b = \Phi_3 = 0$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$.

69. Взяв снова уравнения (75), предположим, что действующая сила \mathbf{F} тождественно равна нулю вдоль стержня, как это, например, имеет место, когда речь идет о стержне, весом которого можно пренебречь по сравнению с силами, приложенными на концах. При таком предположении первое из уравнений (75) имеет интеграл

$$\Phi = \text{const},$$

т. е. *усилие остается постоянным вдоль стержня.*

Далее, так как второе из уравнений (75) можно написать в виде

$$\frac{d\Gamma}{ds} + \frac{d}{ds} (\overrightarrow{AP} \times \Phi) = 0, \quad (76)$$

то, проинтегрировав его вдоль направляющей от точки A ($s=0$) до точки P с криволинейной абсциссой s , получим

$$\Gamma(s) + \overrightarrow{AP} \times \Phi = \Gamma(0),$$

или, принимая во внимание второе из уравнений для концов (74'),

$$\mathbf{M}_A + \Gamma(s) + \overrightarrow{AP} \times \Phi = 0. \quad (77)$$

Векторное соотношение (77) выражает обращение в нуль результирующего момента относительно точки A всех сил, действующих на часть AP стержня; мы могли бы написать это соотношение и непосредственно, как второе из основных уравнений равновесия.

70. Динамометры. Результаты предыдущего пункта приложимы к случаю пружинных весов (динамометр), состоящих в основном (гл. VII, п. 14) из пружины, изогнутой по винтовой линии и прикрепленной одним своим концом A к оправе и имеющей на другом конце отросток, расположенный по ее оси; на конец B отростка действует осевая сила \mathbf{F}_B ($\mathbf{M}_B = 0$). Ввиду того что мы можем здесь пренебречь весом пружины ($\mathbf{F} = 0$), усилие Φ будет постоянным и, вследствие первого из уравнений для концов (74'), равным \mathbf{F}_B . Кроме того, из уравнения, аналогичного уравнению (77) и относящегося к концу B , полагая в нем $\Phi = \mathbf{F}_B$ и $\mathbf{M}_B = 0$, выводим

$$\Gamma(s) + \overrightarrow{BP} \times \mathbf{F}_B = 0,$$

т. е. в любой точке P момент Γ усилий по абсолютной величине равен, а по знаку противоположен моменту относительно этой точки силы \mathbf{F}_B .

71. Плоская эластика. В качестве последнего приложения результатов п. 69 рассмотрим тонкий стержень AB , который в состоянии *естественного равновесия*, т. е. при отсутствии всякой

активной силы, имеет форму плоской кривой. Предположим, что он достиг состояния *вынужденного равновесия* под действием данных активных сил, приложенных к его концам и симметричных относительно его плоскости, т. е. под действием двух сил F_A и F_B , приложенных к концам A и B и лежащих в плоскости стержня, и двух (изгибающих) моментов M_A и M_B , перпендикулярных к этой плоскости.

Из соображений симметрии следует, что фигура равновесия стержня будет плоской; а так как весом стержня в этом случае можно пренебречь, т. е. положить $F = 0$, то усилие Φ будет постоянным вдоль стержня. Для возможности равновесия, на основании уравнений для концов (74'), (74''), должно быть

$$\Phi = -F_A = F_B.$$

Кроме того, при равновесии будет удовлетворяться уравнение

$$\frac{d\Gamma}{ds} + t \times \Phi = 0, \quad (78)$$

которое здесь сводится к скалярному соотношению, так как оба вектора в левой части перпендикулярны к плоскости фигуры.

Для того чтобы из этого уравнения можно было определить фигуру равновесия, необходимо задать некоторые дополнительные условия (п. 66). Чтобы охарактеризовать *упругие стержни*, вводятся два предположения, подсказываемые непосредственно интуицией, одно — качественного, другое — количественного характера.

а) Если предположим, что тонкий стержень сначала имеет прямолинейную форму и будем рассматривать его в каком-нибудь состоянии упругой деформации, оказывается естественным рассматривать изгибающий момент Γ в любой точке P , происходящий от внутренних действий, как момент упругих реакций, которые стремятся уничтожить искривление стержня, т. е. заставляют сечение, проведенное через точку P , вращаться в ту сторону, поворот в которую уменьшает кривизну направляющей. Припоминая, что единичный касательный вектор t предполагается направленным в сторону возрастающих s , т. е. от A к B , и что вектор n направлен к центру кривизны, мы увидим, что указанное предположение качественного характера можно сформулировать так: изгибающий момент Γ стремится повернуть вектор n в сторону вектора t и поэтому должен иметь направление, противоположное направлению вектора бинормали b .

б) Что же касается величины Γ изгибающего момента, то допускают, что во всякой точке P направляющей она пропорциональна разности значений c_0 и c , которые имеет кривизна в P , когда стержень находится в естественном состоянии и в условиях рассматриваемого вынужденного равновесия; т. е. полагают

$$\Gamma = B |c - c_0|, \quad (79)$$

где B обозначает положительную постоянную величину. Это соотношение, которое восходит к Якову и Даниилу Бернулли¹⁾ и к Эйлеру, соответствует схематическому, но геометрически наглядному представлению о внутреннем механизме упругих явлений в балке и составляет теоретическую основу науки о сопротивлении материалов.

72. Для того чтобы освободить уравнение (79) от знака абсолютной величины, необходимо напомнить некоторые сведения из анализа бесконечно малых. Если дана плоская кривая и за параметр выбрана длина дуги s (отсчитываемая от любой ее точки), то равенства

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

будут ее параметрическими уравнениями относительно каких-нибудь заданных осей координат.

Пусть θ есть угол (отсчитываемый как положительный в направлении от оси x к оси y), который касательная в любой точке P кривой, ориентированной в сторону возрастающих s , образует с положительным направлением оси x ; обозначая дифференцирование по s штрихами, будем иметь

$$x' = \cos \theta, \quad y' = \sin \theta, \quad x'' = -\sin \theta \frac{d\theta}{ds}, \quad y'' = \cos \theta \frac{d\theta}{ds},$$

откуда следует

$$x'y'' - x''y' = \frac{d\theta}{ds}. \quad (80)$$

Если обозначим через k производную $d\theta/ds$ (отношение угла смежности к соответствующей элементарной дуге), абсолютное значение которой есть кривизна c кривой в рассматриваемой точке, то будем иметь

$$k = \pm c;$$

¹⁾ Яков Бернулли родился в Базеле в 1654 г., умер там же в 1705 г., был в течение многих лет профессором математики в Вазельском университете. Последователь Лейбница, он способствовал распространению анализа бесконечно малых и был одним из первых основоположников систематического изложения интегрального исчисления. Применял новые методы к вопросам механики, касающимся, в частности, цепной линии, таутохроны и плоской эластичности.

Даниил Бернулли, сын Ивана Бернулли, родился в Базеле в 1700 г. и умер там же в 1782 г. Ближайший друг Эйлера, был его сотрудником в течение двадцати лет в Петербурге; затем вернулся в Швейцарию и преподавал, последовательно, медицину, метафизику и натуральную философию. Помимо известных работ по основам теории упругости и сопротивления материалов, указанных в тексте, мы обязаны ему исследованием по гидродинамике (содержащим, между прочим, знаменитую формулу, носящую его имя), известными исследованиями о колебаниях струны и первой научной попыткой создания кинетической теории газов.

остается выбрать знак, который мы должны приписать величине k (*кривизна со знаком*) в отличие от величины c , по определению существенно положительной (гл. I, п. 73).

Для этой цели заметим прежде всего, что $k = d\theta/ds$ не зависит от выбора осей координат (если, конечно, рассматриваются только пары осей, конгруэнтных друг другу в плоскости): действительно, длина дуги s не зависит от выбора осей, а угол θ при изменении положения осей (если остается неизменным положительное направление вращения) возрастает во всех точках кривой на одну и ту же постоянную, положительную или отрицательную, так что приращение $d\theta$ остается неизменным. Следовательно, для определения знака k мы можем обратиться к осям, выбранным наиболее удобным образом. Именно, мы возьмем за начало координат произвольную точку P кривой и за ось x касательную в P , направленную в сторону возрастающих s , вследствие чего ось y будет однозначно определена тем условием, что она должна составлять с осью x систему осей, конгруэнтных с системой первоначальных осей. Относительно новых осей в точке $P \equiv 0$ мы будем иметь

$$x' = 1, \quad y' = 0$$

и, на основании равенства (80),

$$y'' = k;$$

так что в непосредственной близости от точки P разложения x , y в ряд Тэйлора примут вид

$$x = s + \dots,$$

$$y = \frac{1}{2} ks^2 + \dots$$

Отсюда непосредственно следует, что, в зависимости от того, будет ли $k > 0$ или < 0 , кривая будет обращена вогнутостью в сторону положительных y или в противоположную сторону. Обращаясь к обычным единичным векторам \mathbf{t} и \mathbf{n} и вспоминая, что вектор \mathbf{n} , по определению, всегда обращен в сторону вогнутости кривой, мы можем высказать предыдущее замечание так: кривизна k будет положительной или отрицательной в зависимости от того, совпадает или не совпадает направление вращения от \mathbf{t} к \mathbf{n} в плоскости кривой с направлением вращения от оси x к оси y , или также в зависимости от того, совпадает или не совпадает направление вектора бинормали \mathbf{b} с положительным направлением оси z .

73. Вернемся теперь к случаю тонкого стержня, первоначально прямолинейного и находящегося в состоянии упругой деформации. Так как изгибающий момент Γ всегда направлен в сторону, противоположную стороне \mathbf{b} (качественная гипотеза „а“ п. 71), тогда как кривизна $k = \pm c$ будет положительной или отрицательной,

в зависимости от того, будет ли сторона b совпадать со стороной направления оси z или нет, то количественное предположение (79) в том случае, когда имеем $c_0 = 0$, можно написать в более определенном виде

$$\Gamma_z = - Bk.$$

Число k здесь можно рассматривать как разность между кривизной (со знаком) в состоянии упругого и кривизной в состоянии естественного равновесия. С этой точки зрения предыдущее уравнение можно непосредственно распространить на случай направляющей, уже искривленной в естественном состоянии равновесия, и написать в виде

$$\Gamma_z = - B(k - k_0). \quad (79')$$

74. Мы ограничимся случаем $k_0 = \text{const}$, т. е. предположением, что в естественном состоянии тонкий стержень имеет форму дуги окружности или, в частности, прямолинейного отрезка. Если усилие Φ (постоянное вдоль тонкого стержня, п. 69) равно нулю и, следовательно, равны нулю силы F_A , F_B , действующие на концах, то из равенства (78) мы увидим, что вдоль тонкого стержня изгибающий момент Γ остается постоянным, так что на основании равенства (79') постоянной будет также и кривизна; т. е. фигурой равновесия плоского тонкого стержня (плоская эластика) будет все еще дуга окружности (или прямолинейный отрезок).

Если $\Phi \neq 0$, то достаточно взять ось x параллельной Φ и направленной в ту же сторону для того, чтобы уравнение (78), спроектированное на ось z , приняло вид

$$\frac{d\Gamma_z}{ds} - \Phi \frac{dy}{ds} = 0.$$

Если принять во внимание равенство (79') и припомнить, что

$$k = \frac{d\theta}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta,$$

то

$$B \frac{d^2\theta}{ds^2} = - \Phi \sin \theta;$$

положив

$$B = \Phi l^2$$

и подставив в предыдущее уравнение, мы получим

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = - \frac{1}{l^2} \sin \theta. \quad (81)$$

Это и есть дифференциальное уравнение, определяющее плоскую эластику в предположении $c_0 = \text{const}$.

Не останавливаясь на аналитическом представлении интеграла этого уравнения, мы ограничимся замечанием, что если стержень

в естественном состоянии является прямолинейным и подвергается небольшому изгибу, как это происходит в случае тонкого прямолинейного стержня, заделанного одним концом и подвергающегося на другом конце действию сил, направление результирующей которых мало отличается от направления стержня, то угол между касательной к направляющей в любой точке и ориентированным направлением усилия Φ можно рассматривать как малую величину первого порядка; уравнение (81) сведется тогда к уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{\theta}{l^2},$$

которое интегрируется в тригонометрических функциях (гл. II, п. 36).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Стержневая система находится в равновесии в вертикальной плоскости. Три последовательных стержня в одном и том же направлении обхода наклонены к горизонтали под углами α , β , γ . Промежуточные узлы этих трех стержней находятся под действием вертикальных нагрузок p и q . Доказать, что существует соотношение

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \gamma}{\sin(\beta - \gamma) \cos \alpha}.$$

2. Показать, что если линии действия сил, приложенных к промежуточным узлам веревочного многоугольника, пересекаются в одной и той же точке O , то веревочный многоугольник лежит в плоскости, проходящей через O . Различные усилия Φ все имеют один и тот же момент относительно точки O .

3. Стержневая система $P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ (с чисто узловыми внешними силами) представляет собой простой замкнутый многоугольник, в котором P_n совпадает с P_1 . Для того чтобы иметь условия равновесия, достаточно отбросить условия на концах (6) и, наоборот, присоединить одно уравнение к уравнениям (5) (приписывая, например, индексу i также значение 1 и замечая, что индекс 0 должен быть отождествлен с n).

В этом случае точки Q_1 и Q_n силового многоугольника должны совпасть.

Показать, что существует такая точка O (полюс), что отрезки OQ_1 , OQ_2 , ..., OQ_{n-1} , по величине и направлению, представляют усилия Φ_i , $i=1$ (достаточно применить правило, указанное в п. 26).

Как можно определить положение полюса, если заданы длины стержней веревочного многоугольника и силы F_1 , F_2 , ..., F_n , приложенные к узлам?

4. Два кольца P , Q могут скользить (без трения) вдоль нити заданной длины и ничтожного веса, привязанной к двум точкам A , B .

На первое кольцо действует только его вес p , на второе кольцо с ничтожным весом действует сила величиной q в заданном направлении, не вертикальном, но содержащемся в вертикальной плоскости, проходящей через точки A , B .

При равновесии угол между двумя частями нити, которые сходятся в P , должен делиться пополам линией действия приложенной силы (веса кольца P); то же самое нужно сказать и о частях нити, сходящихся в Q .

Доказать это свойство, исходя из замечания, что равновесие должно существовать и в том случае, когда мы закрепим одно из колец, благодаря