в естественном состоянии является прямолинейным и подвергается небольшому изгибу, как это происходит в случае тонкого прямолинейного стержня, заделанного одним концом и подвергающегося на другом конце действию сил, направление результирующей которых мало отличается от направления стержня, то угол между касательной к направляющей в любой точке и ориентированным направлением усилия **Ф** можно рассматривать как малую величину первого порядка; уравнение (81) сведется тогда к уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{\theta}{l^2},$$

которое интегрируется в тригонометрических функциях (гл. II, п. 36).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Стержневая система находится в равновесии в вертикальной плоскости. Три последовательных стержня в одном и том же направлении обхода наклонены к горизонтали под углами α, β, γ. Промежуточные узлы этих трех стержней находятся под действием вертикальных нагрузок p и q. Доказать, что существует соотношение

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin(\alpha - \beta)\cos\gamma}{\sin(\beta - \gamma)\cos\alpha}.$$

2. Показать, что если линии действия сил, приложенных к промежуточным узлам веревочного многоугольника, пересекаются в одной и той же точке O, то веревочный многоугольник лежит в плоскости, проходящей через O. Различные усилия **Ф** все имеют один и тот же момент относительно точки O.

3. Стержневая система $P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$ (с чисто узловыми внешними силами) представляет собой простой замкнутый многоугольник, в котором P_n совпадает с P_1. Для того чтобы иметь условия равновесия, достаточно отбросить условия на концах (6) и, наоборот, присоединить одно уравнение к уравнениям (5) (приписывая, например, индексу i также значение 1 и замечая, что индекс 0 должен быть отождествлен с n).

В этом случае точки Q_1 и Q_n силового многоугольника должны совпасть.

Показать, что существует такая точка O (полюс), что отрезки OQ_1, $OQ_2, \ldots, OQ_{n-1}$, по величине и направлению, представляют усилия $\mathbf{\Phi}_{i,\,i-1}$ (достаточно применить правило, указанное в п. 26).

Как можно определить положение полюса, если заданы длины стержней веревочного многоугольника и силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, приложенные к узлам?

4. Два кольца P, Q могут скользить (без трения) вдоль нити заданной длины и ничтожного веса, привязанной к двум точкам A, B.

На первое кольцо действует только его вес p, на второе кольцо с ничтожным весом действует сила величиной q в заданном направлении, не вертикальном, но содержащемся в вертикальной плоскости, проходящей через точки A, B.

При равновесии угол между двумя частями нити, которые сходятся в P, должен делиться пополам линией действия приложенной силы (веса кольца P); то же самое нужно сказать и о частях нити, сходящихся в Q.

Доказать это свойство, исходя из замечания, что равновесие должно существовать и в том случае, когда мы закрепим одно из колец, благодаря чему к другому можно применить рассуждения гл. IX, п. 13; два отрезка нити будут тогда фокальными радиусами-векторами эллипса, а сила будет направлена по нормали к эллипсу.

Отсюда тотчас же следует, если принять во внимание условия равновесия колец (узлов) P и Q, что абсолютная величина растягивающего усилия остается постоянной вдоль нити.

Мы можем поэтому решить задачу графическим способом, пользуясь силовым многоугольником. Достаточно провести из какой-нибудь точки Q_2 отрезок Q_2Q_3, эквиполлентный весу p, из Q_3 отрезок Q_3Q_4, эквиполлентный другой силе q, и заметить, что полюс Q_1 должен находиться на равных расстояниях от точек Q_2, Q_3, Q_4 (вследствие постоянства натяжения) и лежать в той же плоскости, что и эти точки, так что он должен совпадать с центром круга, описанного около треугольника $Q_2Q_3Q_4$.

Распространить решение на случай, в котором заданное направление силы q не лежит в вертикальной плоскости, проходящей через точки A, B, а также на случай, в котором вместо того, чтобы задать направление, требуют, чтобы линия действия силы q проходила через некоторую точку C вертикальной плоскости, содержащей точки A, B. (Заметим, что это последнее предположение можно осуществить очень просто, помещая в C блок, по желобу которого проходит нить, прикрепленная одним концом к кольцу Q и несущая на другом конце груз q.)

5. Тяжелая неоднородная нить, прикрепленная к двум неподвижным точкам A, B, находящимся на одной и той же высоте, располагается по дуге окружности (нижней полуокружности). По какому закону должна изменяться плотность (линейная) нити?

Каково выражение натяжения в любой точке?

6. Тяжелая нить, подвешенная за ее концы, располагается по кривой, представляемой уравнением $cy^3 = x^4$ (c — постоянная, ось y вертикальна). В какой точке находится максимум линейной плотности нити? Каково это максимальное значение?

7. Два конца A и B поддерживающего каната висячего моста не находятся на одном и том же уровне. Обозначив через h превышение точки A над B, через f превышение точки B над нижней точкой каната (стрела провеса), через a пролет, через $2p$ вес 1 *пог. м* моста, определить наибольшее натяжение, которому подвергается канат.

8. Канат закреплен в двух точках A, B, расположенных на одном и том же уровне. Его нагрузка состоит из двух равных клиньев, имеющих вид прямоугольных треугольников, симметрично расположенных относительно средней вертикали таким образом, что два катета их горизонтальны, равны каждый $AB/2$ и имеют на средней вертикали общую точку, представляющую собой общую вершину острых углов треугольников.

Можно считать, что на каждый элемент ds нити действует вертикальная сила (направленная вниз), пропорциональная горизонтальной проекции элемента и своему расстоянию от средней вертикали. Принимая эту вертикаль за ось y (с положительным направлением вверх) и обозначая через p множитель пропорциональности, показать, что для проекции Y силы, отнесенной к единице длины, мы будем иметь выражение $-p\,|x|\,\dfrac{dx}{ds}$ (пп. 46 и 50). Определить веревочную кривую на основании уравнений (45), а также (при очевидном значении букв) соотношение между f, φ, p и a.

9. Длина дуги s цепной линии, отсчитываемая от вершины (нижней точки), выражается через угол наклона θ касательной к горизонтальной плоскости формулой [см. формулы (55) и (57)]

$$s = \frac{\varphi}{p} \operatorname{tg} \theta.$$

Однородная тяжелая нить AC длиной l прикреплена одним концом к данной точке A и свешивается таким образом, что, начиная от некоторой точки B, идет далее по линии наибольшего наклона данной плоскости π. В точке A имеется стенка, наклоненная под углом α к вертикали, и нить касается ее. Угол наклона плоскости π равен β. Определить длину l_1 куска BC нити, лежащего на этой плоскости, в предположении, что трение ничтожно и им можно пренебречь. (Приравнять значения натяжений в точке B, относящихся к кускам AB и BC. Первое определяется обычной формулой для натяжения цепной линии [формулой (65)]; второе — это надо доказать — равно произведению веса куска BC на $\sin\beta$.)

10. Дана однородная нить длиной l. В одном случае концы ее прикрепляют к двум неподвижным точкам A и B, лежащим на одной и той же горизонтали, и оставляют под действием ее веса. В другом случае ее поддерживают также и в средней точке, прикрепляя эту точку к средине C отрезка AB. Доказать, что в крайних точках A, B обе цепные линии второго случая имеют тот же самый наклон, что и цепная линия в первом случае, в то время как натяжение во втором случае в два раза меньше, чем в первом.

11. Однородная нить длиной l прикреплена одним концом к неподвижной точке A и проходит по небольшому блоку B, расположенному на высоте точки A. Часть нити, находящаяся за блоком, свободно свешивается вниз.

Выразить длину l_1 свешивающейся части нити в функции от l и от a (расстояние AB), предполагая ничтожными размеры и трение блока.

Каково наибольшее значение a, при котором еще возможно равновесие?

12. Расстояние a между двумя последовательными изоляторами телефонной линии равно 80 *м*. Провод (бронзовый, диаметром в 1 *мм*) весом 7 *кг* на 1 *км*, так что вес p 1 *пог. м* равен $7 \cdot 10^{-3}$ *кг*, был натянут в момент подвешивания грузом в 4 *кг*. Эта нагрузка действовала на проволоку в горизонтальном направлении (посредством блока) до пайки, так что ее можно отождествить с горизонтальным натяжением φ. Так как отношение

$$\frac{pa}{\varphi} = \frac{7 \cdot 10^{-3} \cdot 80}{4} = 0{,}14$$

достаточно мало, то цепную линию можно рассматривать как дугу параболы (п. 54) и пользоваться соотношением (48′).

Предполагается, что подвешивание провода производилось летом при средней температуре 20°. Когда температура падает, проволока укорачивается и ее длина становится равной $l' < l$; a, конечно, остается неизменным, а p мы должны будем заменить через $p' = pl/l'$. Это увеличивает натяжение и дает новое значение φ' величине φ. Определить φ' [пользуясь равенством (48′)] для наиболее низкой зимней температуры, считая ее равной —10° С и приняв коэффициент расширения провода равным $16 \cdot 10^{-6}$ *см* на каждый градус Цельсия. Найти также наибольшее натяжение провода при заданных условиях [6,225 *кг*; ср. G. Bisconcini, *Boll. dell' Unione Mat. Italiana*, IV, 5—7 (1925)].

13. У дуги цепной линии концы находятся на одном и том же уровне. Если a означает пролет, то наибольшим значением натяжения T, согласно формулам (65) и (56), будет

$$\tau = \frac{\varphi}{2}\{e^{pa/2\varphi} + e^{-pa/2\varphi}\}.$$

Для нити с заданной величиной веса единицы длины (или с заданной линейной плотностью) τ, как мы видим, изменяется вместе с длиной a пролета, постоянно возрастая, и вместе с горизонтальным натяжением φ (которое зависит от длины нити).

Допустив, что τ не должно превосходить заданный предел τ_0 (для того чтобы не подвергать нить излишней опасности), показать, как определить предельный пролет a_0 (т. е. наибольшую его величину, совместную с условием $\tau \leqslant \tau_0$).

Показать, что:

1) Если обозначить через φ_0 то значение φ, которое мы имеем в случае цепной линии, соответствующей предельному пролету, то $pa_0/2\varphi_0$ является корнем уравнения

$$e^z + e^{-z} - z(e^z - e^{-z}) = 0.$$

2) Предыдущее уравнение относительно z имеет только один положительный корень, заключенный между 1 и 2; приближенное значение этого корня есть 1,2.

3) Численное значение a_0 в функции от τ_0 получается из двух уравнений

$$\frac{pa_0}{2\varphi_0} = 1{,}2, \qquad \tau_0 = \frac{\varphi_0}{2}\{e^{1,2} + e^{-1,2}\}.$$

4) Стрела провеса f и длина l нити, определяемые вообще из равенств

$$f = \frac{\varphi}{2p}\{e^{pa/2\varphi} + e^{-pa/2\varphi} - 2\},$$

$$l = \frac{\varphi}{p}\{e^{pa/2\varphi} - e^{-pa/2\varphi}\},$$

будут равны приближенно $^1/_3$ и $^5/_4$ предельного значения.

Вычислить a_0 для случая бронзового телефонного провода в 1 *мм* диаметром, принимая $\tau_0 = 15$ *кг* и, как и в предыдущем упражнении, $p = 0{,}007$ *кг* на 1 *пог. м.* (Будем иметь $a_0 = 2\,841$ *м.*)

Заметим, что для всякого значения величины a, меньшего предельного пролета, стрела провеса, соответствующая наименьшему значению τ, связана с a тем же самым соотношением, которое связывает f_0 с a_0.

При числовых данных задачи $a = 1$ *км*, т. е. не превосходит a_0. Пользуясь для стрелы провеса f предыдущим выражением при $pa/2\varphi = 1{,}2$ (т. е. около одной трети километра), определить, каково будет наибольшее растягивающее усилие? [Ср. Bisconcini, цит. место, стр. 341—345.]

14. Исследуем вопрос предыдущего упражнения (определить наибольший пролет, совместимый с условием $\tau \leqslant \tau_0$) на основании приближенной формулы, которой обычно пользуются техники и инженеры (п. 54). Однако надо заметить (это можно проверить вычислением), что таким образом мы найдем только грубо приближенные результаты (с относительной ошибкой около 10%). Причину этого мы найдем, если покажем, что из формул, относящихся к сильно натянутой нити, следует равенство

$$\frac{pa_0}{\varphi_0} = \sqrt{8},$$

так что мы находимся вне области, в которой было бы законным (п. 54) применение приближенной формулы. Ср. Bisconcini, *Boll. dell' Unione Mat. Italiana*, IV, 5—7 (1925), стр. 345—346.

15. Приведем следующие (почти очевидные) геометрические замечания.

1) Если ρ и φ — полярные координаты точки P на плоскости, а $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы соответствующей декартовой системы осей Oxy, то будем иметь

$$\overrightarrow{OP} = \rho(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}).$$

2) Для окружности с радиусом R (так как $ds = R\,d\varphi$) отсюда следует

$$\boldsymbol{t} = \frac{dP}{ds} = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{n} = -\frac{1}{R}\overrightarrow{OP} = \cos\varphi\boldsymbol{i} - \sin\varphi\boldsymbol{j}.$$

3) И, наконец, для винтовой линии на круговом цилиндре имеем, на основании формул гл. I, п. 82,

$$\boldsymbol{t} = \pm\sin\theta(-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) + \cos\theta\boldsymbol{k},$$

а также

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N} = -\cos\varphi\boldsymbol{i} - \sin\varphi\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n} = \cos\theta(\sin\varphi\boldsymbol{i} - \cos\varphi\boldsymbol{j}) \pm \sin\theta\boldsymbol{k},$$

причем будут иметь место верхние или нижние знаки, в зависимости от того, идет ли речь о правой или левой винтовой линии.

Имея в виду эти замечания, показать, что если при равновесии тонкого стержня, имеющего форму винтовой линии, внешняя сила $\boldsymbol{F}$ обращается в нуль и, следовательно, усилие $\boldsymbol{\Phi}$ передается неизменным, то проекции его Φ_1 на касательную, Φ_2 на главную нормаль, Φ_3 на бинормаль будут изменяться вместе с φ согласно формулам

$$\Phi_1 = \mp A\sin\theta\cos(\varphi + \alpha) + B\cos\theta,$$

$$\Phi_2 = A\sin(\varphi + \alpha),$$

$$\Phi_3 = A\cos\theta\cos(\varphi + \alpha) \pm B\sin\theta,$$

где A, B, α (а также и θ) — постоянные, а для знаков остается в силе указанное выше условие. В частном случае, когда усилие $\boldsymbol{\Phi}$ является чисто осевым, $A = 0$.

16. В предположении, что внешние силы приложены исключительно к концам тонкого стержня, находящегося в равновесии ($\boldsymbol{F} = 0$), на основании уравнений (75) остается постоянным не только $\boldsymbol{\Phi}$, но также и $\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\Phi}$.

17. Вывести из внутренних уравнений равновесия тонкого стержня (п. 68) три дифференциальных соотношения, каждое из которых содержит только одну из величин Φ_1, Φ_2, Γ_3.

18. Определить (на основании уравнений п. 68) общие выражения для перерезывающего усилия и изгибающего момента вдоль тонкого кругового стержня, подвергающегося действию равномерно распределенных сил (F_t и F_n — постоянные).

Указать статическое значение постоянных, вводимых интегрированием (представляя себе стержень разрезанным вдоль любого нормального сечения).