Глава XV

ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 1. Принцип виртуальных работ

1. Чтобы установить условия равновесия материальной системы S какой угодно природы, когда известны связи и активные силы, под действием которых система находится, теоретически достаточно представить себе всякую связь замененной соответствующей реакцией и рассматривать систему как состоящую из свободных точек, каждая из которых находится под одновременным действием приложенных к ней активных сил и реакций. Условия равновесия получатся, если для каждой точки системы S приравнять нулю результирующую этих двух сил.

Уравнения равновесия, к которым мы таким образом приходим, содержат реакции связей, представляющие собой, вообще говоря, неизвестные силы, так как в число данных задачи входят лишь различные способы осуществления связей, а не самые реакции. Отсюда следует, что, если мы хотим выразить условия равновесия только посредством прямых данных задачи, мы должны из указанных выше уравнений исключить реакции (ср., например, гл. XIII, § 3); в конкретных случаях, как это заранее можно предвидеть, этот способ исключения может оказаться весьма сложным, если не совсем невозможным.

Конечно, можно было бы попытаться упростить его, по крайней мере в некоторых случаях, следующим искусственным путем, подобным тому, которому мы следовали в случае стержневых систем (предыдущая глава). Так как мы уже вывели ранее условия равновесия для различных частных видов материальных систем (твердые тела, стержневые системы, нити, ...), то можно представить себе, что данная система S разложена на отдельные системы, каждая из которых принадлежит к одному из этих видов, и введя, кроме активных сил, реакции, соответствующие взаимным связям различных *частей* системы S, написать уравнения равновесия для каждой из этих частей в отдельности. Но при этом в уравнения равновесия всегда будут входить реакции, подлежащие исключению; важно отметить, что при прочих равных условиях число подлежащих исключению реакций будет тем больше (и, следовательно, тем более трудным будет процесс их исключения), чем больше будет число связей, т. е. (пользуясь выражением, которое вполне точно в случае голономных систем), чем меньше будет число степеней свободы системы.

Все это показывает, насколько желательно установить такие способы, при применении которых реакции автоматически исключались бы из уравнений равновесия при самом составлении этих уравнений, как бы ни были разнообразны и сложны практические приспособления, осуществляющие связи. *В случае связей без трения* такой способ дается так называемым *принципом виртуальных работ*, который мы сформулируем и разъясним в следующем пункте, а индуктивное обоснование его дадим непосредственно после этого.

2. *Принцип виртуальных работ*, в своей наиболее общей форме, приложим как к статическим, так и к динамическим задачам. Его можно выразить так:

Реакции, происходящие от связей без трения, таковы, что сумма элементарных работ их равна нулю на всяком виртуальном обратимом перемещении и *положительна или равна нулю на всяком необратимом перемещении* (ср. гл. VI, §§ 3, 4).

Полезно отметить, что при составлении суммы работ реакций работа каждой из них должна быть вычислена на виртуальном перемещении той *материальной точки*, к которой она приложена в рассматриваемой системе. Так, если речь идет о системе материальных точек P_i $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ и $\boldsymbol{R}_i$ есть реакция, приложенная к точке P_i, то сумма работ $\delta\Lambda$ реакций на виртуальном перемещении δP_i определится соотношением

$$\delta\Lambda = \sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta P_i.$$

Заметим, что сформулированному выше принципу можно придать более сжатую форму, а именно: *сумма виртуальных работ* $\delta\Lambda$ *реакций не может быть отрицательной.*

Действительно, для необратимых перемещений это как раз и утверждается в высказанном только что принципе; для обратимых перемещений рассмотрим вместе с любым обратимым перемещением противоположное ему перемещение; характеристическое неравенство охватывает тогда одновременно случаи

$$\delta\Lambda \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \delta\Lambda \leqslant 0;$$

оба эти случая будут совместимы только при условии, чтобы было

$$\delta\Lambda = 0.$$

Оставляя в стороне системы с односторонними связями (что довольно часто делается даже без явной оговорки), мы можем рассматривать только обратимые перемещения; в этом случае принцип виртуальных работ требует, чтобы работа реакций обращалась в нуль на всяком виртуальном перемещении, совместном со связями, и поэтому выражается равенством

$$\delta\Lambda = 0.$$

Заметим, наконец, что свойство реакций, выражаемое принципом виртуальных работ, не зависит от способа осуществления связей. Это же можно сказать и об общих условиях равновесия, которые мы выведем в ближайшем параграфе из этого принципа для любой материальной системы. Таким образом, будет оправдан тот взгляд на независимость условий равновесия от способа осуществления связей, который был введен как руководящее правило в элементарной статике точки (гл. IX, п. 12) и с надлежащими оговорками, в тех случаях, когда следует принимать во внимание трение и пассивные сопротивления (поскольку эти последние можно представить в виде трения в связях).

3. С физической точки зрения законность принципа виртуальных работ можно обосновать, показав, что он оправдывается (т. е. оказывается согласным с опытами) в весьма большом числе частных случаев; отсюда мы и приходим к естественному и необходимому выводу, что его надо считать справедливым вообще.

а) В случае *одной точки, вынужденной оставаться на поверхности или на кривой* (*лишенной трения*), имеется одна реакция, нормальная соответственно к поверхности или к кривой, тогда как всякое виртуальное перемещение (по крайней мере, с точностью до бесконечно малых порядка выше первого) расположено в касательной плоскости или соответственно на касательной прямой.

Поэтому элементарная работа (скалярное произведение силы на перемещение) будет равна нулю.

б) Остановимся на случае *односторонней связи*. Например, предположим, что точка, находясь на поверхности, не может перейти через нее на другую сторону, но ничто не мешает ей сойти с поверхности в ту сторону, на которой она находится.

В обыкновенной конфигурации (гл. VI, п. 21) связь не действует, и потому работа $\boldsymbol{R} \cdot \delta P$ равна нулю. В пограничной конфигурации реакция в силу своей природы направлена в ту сторону от поверхности, на которой находится точка, и нормальна к поверхности. Эти свойства реакции, подсказываемые наблюдениями, равносильны принципу виртуальных работ.

Действительно, на всяком необратимом перемещении, т. е. на перемещении, которое направлено в наружную сторону, реакция и перемещение образуют острый угол и работа положительна; у всякого обратимого перемещения этот угол прямой и работа равна нулю.

в) В случае *неизменяемой системы* достаточно обратить внимание на то обстоятельство, что реакции связей (реакции, возникающие вследствие неизменности расстояний между точками системы, а не реакции, происходящие от возможных связей с другими телами, посторонними для системы) являются силами внутренними и потому попарно равными и направленными в противоположные стороны.

Полная работа внутренних реакций может поэтому рассматриваться как сумма работ, выполненных этими равными и прямо противоположными силами, и утверждение, заключающееся в принципе виртуальных работ, будет доказано, если сумма элементарных работ каждых двух таких сил будет равна нулю.

Пусть P, P' будут две какие угодно точки системы δP, $\delta P'$ — соответственные перемещения, испытываемые точками в общем виртуальном перемещении системы; $\boldsymbol{R}$ — сила, с которой точка P' действует на P, и $\boldsymbol{R}' = -\boldsymbol{R}$ — сила, с которой точка P действует на P'. Во всяком движении неизменяемой системы (гл. III, п. 2) скорости двух любых ее точек имеют равные проекции на соединяющую их прямую. То же самое свойство принадлежит, следовательно, и бесконечно малым перемещениям, испытываемым точками (в действительном движении системы) в течение некоторого промежутка времени dt.

Так как, когда речь идет о системе со связями, независящими от времени, всякое виртуальное перемещение является также и возможным (гл. VI, п. 14), то мы можем считать, что δP и $\delta P'$ имеют равные составляющие по направлению PP'.

Обозначим через Δ общее значение этих составляющих, представив себе для определенности, что за положительное направление на PP' берется направление силы $\boldsymbol{R}$.

Тогда виртуальная работа $\boldsymbol{R} \cdot \delta P$ силы $\boldsymbol{R}$ сведется к $R\Delta$ (в силу определения скалярного произведения), а виртуальная работа $\boldsymbol{R}' \cdot \delta P'$ силы $\boldsymbol{R}'$ — к $-R\Delta$.

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{R} \cdot \delta P + \boldsymbol{R}' \cdot \delta P' = 0.$$

г) Если, наконец, связи, наложенные на твердое тело, таковы, что в теле имеется закрепленная точка или закрепленная прямая или тело опирается (без трения) на другие тела, то мы тотчас же видим, что виртуальная работа реакций, происходящих от этих связей, равна нулю в первых двух случаях и положительна или равна нулю в третьем.

д) Справедливость принципа виртуальных работ можно подтвердить непосредственно в очень многих случаях как путем анализа различных видов связей и комбинирования их между собой, так (даже и для неголономных систем) и на основе более простых постулатов и рассуждений.

Можно также утверждать, что для всех систем, встречающихся в природе, удается установить его непосредственно; такое исследование очень способствует полному пониманию механики и ее многочисленных приложений.

Мы не можем пойти по такому длинному пути и примем принцип виртуальных работ как общий постулат, рассматривая его как синтез опытных данных всей механики систем без трения. С абстрактной точки зрения этот принцип дает все, что можно требовать от общего принципа, так как он может быть выражен общей формулой, приложимой к сколь угодно сложным системам [1]).

§ 2. Общие условия равновесия. Общее соотношение статики

4. Как в случаях, разобранных в предыдущих главах, так и в аналитической статике чаще всего приходится рассматривать связи, вид которых, как бы ни был он сложен, не изменяется со временем, что, впрочем, отвечает самой природе статических задач, в которых речь идет об определении сил, способных удерживать тела в покое.

По этой причине, а также и для того, чтобы следовать историческому ходу развития статики, мы изложим здесь приложение принципа виртуальных работ к аналитической статике, обращаясь к материальным системам, *связи которых не зависят от времени*; следует, однако, заметить, что выводы, к которым мы таким образом придем, останутся в силе во всех случаях, если только речь идет о системах без трения.

Из предположения о независимости связей от времени можно легко вывести два следствия, относящихся к действительным перемещениям системы:

а) *Действительное перемещение движущейся материальной системы со связями, не зависящими от времени, за всякий бесконечно малый промежуток времени dt всегда можно рассматривать как виртуальное перемещение.*

б) *Сумма работ реакций на всяком действительном* (бесконечно малом) *перемещении системы равна нулю.*

Следствие „а“ известно уже из кинематики (ср. гл. VI, п. 14), так что остается только доказать следствие „б“. Далее, если действительное перемещение (которое на основании следствия „а“ можно рассматривать как виртуальное) является обратимым, то утверждение „б“ входит в принцип виртуальных работ.

---

[1]) Первые указания на принцип виртуальных работ можно встретить уже у Аристотеля. Столетняя работа над этим принципом, проводимая на наиболее замечательных конкретных задачах статики такими учеными, как Стевин, Галилей, Декарт, Иван Бернулли, завершилась в синтезе Лагранжа, поставившим во главу всей статики систем, лишенных трения, свой знаменитый *принцип виртуальных скоростей*, который по существу выражает, только лишь для случая равновесия, свойство реакций, высказанное в тексте, и совпадает, даже и по форме, с так называемым общим соотношением статики (см. § 2). Допущение, сделанное в тексте, что указанное там свойство реакций имеет место во всяком случае (а не только при равновесии), оправдывается другими постулатами механики, как мы увидим в гл. V, т. II. Для ознакомления с историческим происхождением принципа виртуальных работ рекомендуем обратиться к лекциям G. Collonnetti, *I fondamenti della Statica*, Турин, 1927.