ной точки зрения этот принцип дает все, что можно требовать от общего принципа, так как он может быть выражен общей формулой, приложимой к сколь угодно сложным системам [1]).

§ 2. Общие условия равновесия. Общее соотношение статики

4. Как в случаях, разобранных в предыдущих главах, так и в аналитической статике чаще всего приходится рассматривать связи, вид которых, как бы ни был он сложен, не изменяется со временем, что, впрочем, отвечает самой природе статических задач, в которых речь идет об определении сил, способных удерживать тела в покое.

По этой причине, а также и для того, чтобы следовать историческому ходу развития статики, мы изложим здесь приложение принципа виртуальных работ к аналитической статике, обращаясь к материальным системам, *связи которых не зависят от времени*; следует, однако, заметить, что выводы, к которым мы таким образом придем, останутся в силе во всех случаях, если только речь идет о системах без трения.

Из предположения о независимости связей от времени можно легко вывести два следствия, относящихся к действительным перемещениям системы:

а) *Действительное перемещение движущейся материальной системы со связями, не зависящими от времени, за всякий бесконечно малый промежуток времени dt всегда можно рассматривать как виртуальное перемещение.*

б) *Сумма работ реакций на всяком действительном* (бесконечно малом) *перемещении системы равна нулю.*

Следствие „а“ известно уже из кинематики (ср. гл. VI, п. 14), так что остается только доказать следствие „б“. Далее, если действительное перемещение (которое на основании следствия „а“ можно рассматривать как виртуальное) является обратимым, то утверждение „б“ входит в принцип виртуальных работ.

---

[1]) Первые указания на принцип виртуальных работ можно встретить уже у Аристотеля. Столетняя работа над этим принципом, проводимая на наиболее замечательных конкретных задачах статики такими учеными, как Стевин, Галилей, Декарт, Иван Бернулли, завершилась в синтезе Лагранжа, поставившим во главу всей статики систем, лишенных трения, свой знаменитый *принцип виртуальных скоростей*, который по существу выражает, только лишь для случая равновесия, свойство реакций, высказанное в тексте, и совпадает, даже и по форме, с так называемым общим соотношением статики (см. § 2). Допущение, сделанное в тексте, что указанное там свойство реакций имеет место во всяком случае (а не только при равновесии), оправдывается другими постулатами механики, как мы увидим в гл. V, т. II. Для ознакомления с историческим происхождением принципа виртуальных работ рекомендуем обратиться к лекциям G. Collonnetti, *I fondamenti della Statica*, Турин, 1927.

Если действительное перемещение, рассматриваемое как виртуальное, оказывается необратимым, то следствие „б" можно доказать индуктивным способом, обращаясь, как в п. 3, к непосредственному анализу типичных случаев и *допуская непрерывность реакций*, которая, если предположить непрерывными прямо приложенные силы, что имеет место в большей части случаев, равносильна допущению непрерывности ускорений точек движущейся системы (ср. гл. II, п. 4), как это следует из основного уравнения $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$.

Действительно, обратимся к случаю одной материальной точки, вынужденной оставаться на некоторой поверхности σ (не изменяющейся с течением времени). Действительное перемещение надо считать (как виртуальное) необратимым только тогда, когда точка отрывается от поверхности в область, в которую связь не препятствует ей двигаться. Если точка P оставляет поверхность σ в момент t_0, то в моменты t, непосредственно следующие за t_0, реакция, очевидно, будет равна нулю. Так как это будет иметь место при каком угодно $t>t_0$, как бы ни был момент t близок к t_0, то мы заключаем, при допущении непрерывности реакции $\boldsymbol{R}$, что она равна нулю, также и в момент t_0 начала перемещения, так что работа реакции для рассматриваемого перемещения, конечно, будет равна нулю.

К подобному же выводу мы придем, очевидно, и в случае двух материальных точек PP', связанных гибкой и нерастяжимой нитью; при такой связи необратимым будет всякое действительное перемещение, при котором две точки переходят из одной конфигурации с натянутой нитью в другую, бесконечно близкую конфигурацию с ослабленной нитью. Применяя подобные рассуждения к различным типам систем со связями, которые могут встретиться в природе, мы придем, как это уже было при рассмотрении принципа виртуальных работ, к следствию „б".

5. Рассмотрим теперь произвольную систему материальных точек P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, подчиненных связям без трения и не зависящим от времени. Будем искать условия равновесия, т. е. условия, необходимые и достаточные, для того чтобы силы $\boldsymbol{F}_i$, прямо приложенные к точкам P_i системы, были в состоянии удерживать систему в покое. Если для всякой точки P_i вместо связи мы введем соответствующую реакцию $\boldsymbol{R}_i$, то отдельные точки системы можно рассматривать как свободные материальные точки, каждая из которых находится под действием силы $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i$, так что всякий раз, когда система находится в равновесии, мы должны будем иметь (гл. VII, п. 11)

$$\boldsymbol{F}_i=-\boldsymbol{R}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N);$$

сумма работ $\delta L=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta P_i$ активных сил $\boldsymbol{F}_i$ на каком угодно виртуальном перемещении δP_i системы будет определяться равенством

$$\delta L = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta P_i = -\delta\Lambda,$$

где через $\delta\Lambda$, как и в п. 2, обозначена сумма элементарных работ реакций.

Отсюда на основании принципа виртуальных работ в его общей формулировке (п. 2) заключаем, что для равновесия системы необходимо, чтобы активные силы на всех виртуальных перемещениях удовлетворяли соотношению

$$\delta L \leqslant 0. \tag{1}$$

6. Предполагая опять, как в п. 5, что на систему наложены связи без трения, не зависящие от времени, мы можем утверждать, что *условие* (1) *является также и достаточным для равновесия системы*, т. е. если для всякого виртуального перемещения оправдывается соотношение (1) и система в данный момент находится в равновесии, то она будет оставаться в равновесии до тех пор, пока будет удовлетворяться это соотношение.

Достаточно показать, что если система, предполагаемая вначале покоящейся, начала бы двигаться под действием данной системы сил, то существовало бы, по крайней мере, одно ее виртуальное перемещение, на котором, вопреки соотношению (1), сумма δL элементарных работ активных сил оказалась бы положительной. Так как в силу замечания „a“ п. 4 всякое действительное перемещение системы можно рассматривать как виртуальное, то достаточно также показать, что сумма элементарных работ активных сил будет положительной на действительном перемещении, которое испытывает система в первый элемент времени при переходе ее из состояния покоя в состояние движения.

Для этой цели вспомним прежде всего, что если вводятся реакции связей $\boldsymbol{R}_i$, то точки P_i системы ведут себя так, как свободные материальные точки, на каждую из которых действует сила $\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i$. Поэтому всякая точка P_i, которая начинает действительно двигаться из состояния покоя (по предположению, существует, по меньшей мере, одна такая точка), испытывает в первый элемент времени dt перемещение δP_i, которое, в силу закона возникающего движения (гл. VII, п. 12), будет иметь направление и сторону соответствующей силы $\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i$, так что виртуальная работа $(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta P_i$, совершенная этой силой, будет существенно положительной [1]).

[1]) Полезно добавить некоторые разъяснения о бесконечно малых перемещениях δP_i, которые мы рассматриваем в тексте. Воспользовавшись тем обстоятельством, что речь идет о системах со связями, не зависящими от времени, мы приняли за виртуальное перемещение δP_i действительное элементарное перемещение, которое имеет место за элемент времени dt, сле-

Складывая выражения для элементарных работ, относящиеся к точкам P_i, которые действительно движутся, и обозначая, как обычно, через δL и $\delta \Lambda$ суммы элементарных работ активных сил и, соответственно, реакций, будем иметь

$$\delta L + \delta \Lambda > 0.$$

Так как на основании замечания „б" п. 4 $\delta \Lambda = 0$, то предыдущее неравенство принимает вид

$$\delta L > 0,$$

что противоречит условию (1). Таким образом, доказано, что материальная система, которая находится вначале в покое и подвергается действию активных сил, удовлетворяющих на всяком виртуальном перемещении условию (1), не может придти в движение.

7. Объединяя в общей формулировке оба предложения, одно обратное другому, установленные в двух последних пунктах при добавочном предположении „б" п. 4, т. е. допуская непрерывность реакций, мы придем к следующей основной теореме.

Условие, необходимое и достаточное для равновесия материальной системы со связями без трения (и не зависящими от времени), состоит в том, что сумма элементарных работ активных сил на всяком виртуальном перемещении должна быть равна нулю или меньше нуля.

Это заключение, как мы видим, не зависит от способов осуществления связей, так как в нем идет речь о виртуальных перемещениях, которые зависят от геометрического и кинематического эффектов связей, но не от тех устройств, при помощи которых осуществляются связи. Это делает более ясными рассуждения п. 12 гл. IX.

дующий за любым начальным моментом t; т. е. мы положили $\delta P_i = P_i(t+dt) - P_i(t) = \frac{1}{2} a_i\, dt^2 +$ бесконечно малые величины высшего порядка, где третья часть равенства может быть получена на основании рассуждений пп. 62 и 67 гл. I, если применить разложение в ряд Тэйлора к точке $P_i(t+dt)$ и принять во внимание, что $dP_i/dt = v_i = 0$. Отсюда ясно, что различные δP_i будут иметь порядок dt^2. Если dt рассматривается как главная бесконечно малая величина, то каждой величиной δP_i можно было бы пренебречь как бесконечно малой порядка выше первого и доказательство было бы лишь кажущимся. Но ничто не мешает принять саму величину dt^2 за главную бесконечно малую, или, сохраняя dt в качестве главной бесконечно малой, за виртуальные перемещения δP_i принять не самые разности $P_i(t+dt) - P_i(t)$, но их отношения к dt. В обоих случаях δP_i, не равные нулю, будут бесконечно малыми одного и того же наименьшего порядка (рассуждение ведется здесь в предположении, что желательно исключить случай, когда не все a_i являются нулями).

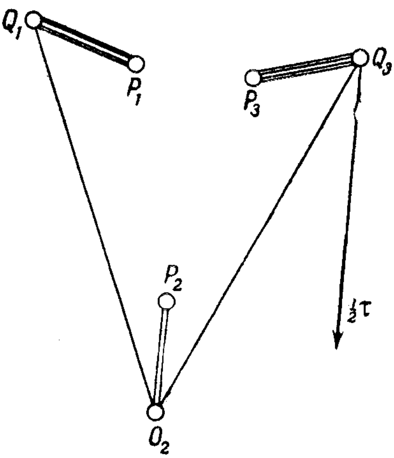
8. Заметим, что в этой именно форме и был высказан с самого начала принцип виртуальных работ (или, как одно время называли его, принцип „виртуальных скоростей").

Здесь уместно остановиться на интуитивном доказательстве принципа виртуальных работ, которое дал Лагранж в своей Аналитической механике.

Обратимся к обычной системе из N точек P_i, подчиненных связям без трения, не зависящим от времени, и находящихся под действием заданных прямо приложенных сил $\boldsymbol{F}_i$; предположим сначала, что величины F_i этих сил соизмеримы между собой, т. е. могут быть выражены в виде

$$F_1 = n_1\tau, \qquad F_2 = n_2\tau, \;\ldots, \qquad F_N = n_N\tau, \tag{2}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_N$ обозначают N известных целых чисел. Если величины сил F_i несоизмеримы, то всегда можно выбрать их достаточно малыми для того, чтобы они могли быть представлены в виде (2) с каким-нибудь заданным приближением.



Фиг. 69.

Предположим теперь, что с каждой точкой P_i (фиг. 69) связано весьма малое, абсолютно гладкое колечко и что, кроме того, в пространстве закреплены N таких же колечек Q_i, соответственно на линии действия каждой отдельной силы $\boldsymbol{F}_i$ и с той стороны, в которую действует эта сила *).

Привязав к колечку Q_i конец гибкой и нерастяжимой нити, заставим эту нить пройти попеременно через колечки P_1 и Q_1 n_1 раз, так что между P_1 и Q_1 будут натянуты $2n_1$ кусков нити. После этого заставим свободный конец нити, который выходит в последний раз из Q_1, пройти попеременно n_2 раз через P_2 и Q_2; так будем продолжать до тех пор, пока не будем иметь $2n_N$ кусков нити, натянутых между колечками P_N и Q_N, и свободный конец, выходящий из Q_N. Предполагая нить натянутой по всей ее длине, приложим к свободному ее концу силу, равную $\tau/2$. Так как нить передает эту силу вдоль всей своей длины неизменной, то любая точка P_i, поскольку между P_i и Q_i натянуты $2n_i$ кусков нити, подвергается

*) Лагранж в своем доказательстве пользуется для рассматриваемой цели полиспастами, составленными из отдельных блоков. См. Лагранж Ж. Л., Аналитическая механика, т. I, стр. 42—47, 1950. (*Прим. ред.*)

действию полного натяжения величиной $2n_i \cdot \tau/2 = F_i$ в направлении ориентированного отрезка P_iQ_i и в сторону от P_i к Q_i, т. е. в ту же сторону, в которую действует сила $\boldsymbol{F}_i$, так что только одна сила $\tau/2$, приложенная к свободному концу нити, определяет в каждой точке P_i системы, благодаря описанному устройству, силу, тождественную заданной силе $\boldsymbol{F}_i$.

Теперь заставим точки системы совершить виртуальные перемещения δP_i; если δl_i есть проекция вектора δP_i на ориентированное направление вектора $\overrightarrow{P_iQ_i}$, то очевидно, что δl_i с точностью до бесконечно малых высшего порядка дает вариацию расстояния между закрепленным колечком Q_i и подвижным колечком P_i: именно, мы будем иметь сближение, если $\delta l_i > 0$, и удаление, если $\delta l_i < 0$. Другими словами, мы можем сказать, что каждый кусок нити, натянутой между P_i и Q_i, укорачивается в *алгебраическом смысле* на δl_i, так что полное укорочение (алгебраическое), которое на рассматриваемом виртуальном перемещении системы испытывает полная длина нити, заключенной между закрепленным началом в Q_1 и концом Q_N последнего куска, натянутого между P_N и Q_N, определяется выражением

$$2n_1\,\delta l_1 + 2n_2\,\delta l_2 + \ldots + 2n_N\,\delta l_N.$$

Можно также сказать, что это выражение, взятое по абсолютной величине, измеряет кусок нити, который при рассматриваемом виртуальном перемещении системы выходит из кольца Q_N или соответственно входит туда, в зависимости от того, положительно или отрицательно это выражение.

Допустим, далее, что система под действием активных сил $\boldsymbol{F}_i$ находится в равновесии. Предположив, что силы $\boldsymbol{F}_i$ заменены описанным выше устройством, мы увидим, что точки P_i, вначале находящиеся в покое, останутся в покое также и тогда, когда к свободному концу нити будет приложена сила $\tau/2$. Это означает, что связи не допускают никаких перемещений точек P_i, при которых нить, подчиняясь действию силы $\tau/2$, выходила бы, хотя бы незначительно, из последнего колечка Q_N; или, другими словами, если имеется равновесие, то для всякого виртуального перемещения системы должно быть

$$2n_1\delta l_1 + 2n_2\delta l_2 + \ldots + 2n_N\delta l_N \leqslant 0. \tag{3}$$

Обратно, легко убедиться, что если на всяком виртуальном перемещении удовлетворяется соотношение (3), то система будет находиться в равновесии под действием силы $\tau/2$ или, что одно и то же, под действием заданных сил $\boldsymbol{F}_i$. Действительно, если система, предполагаемая вначале находящейся в покое, начала бы под действием силы натяжения $\tau/2$ двигаться, то, по крайней мере, в первый элемент времени нить следовала бы по силе $\tau/2$, выходя на некоторый кусок из кольца Q_N; поэтому существовало бы перемещение, совместимое со связями (действительное перемещение), для которого осуществлялось бы неравенство

$$2n_1\,\delta l_1 + 2n_2\,\delta l_2 + \ldots + 2n_N\,\delta l_N > 0$$

вопреки предположению (3).

Таким образом, необходимое и достаточное условие для равновесия выражается соотношением (3), которое, если обе части его умножим на $\tau/2$ и примем во внимание равенства (2), преобразуется в соотношение

$$F_1\,\delta l_1 + F_2\,\delta l_2 + \ldots + F_N\,\delta l_N \leqslant 0,$$

т. е. как раз в соотношение (1) из п. 5.

9. В пп. 4—7 было доказано, что для систем со связями без трения и не зависящими от времени условие

$$\delta L \leqslant 0 \tag{1}$$

необходимо и достаточно для равновесия. Но, как мы уже указывали в самом начале, можно доказать, что оно является необходимым и достаточным условием равновесия также и для систем со связями без трения и *как угодно изменяющимися во времени*.

Соотношение (1), взятое в этом общем своем значении, обычно называется *общим соотношением статики*.

Если система не допускает необратимых виртуальных перемещений, что будет иметь место, если система не имеет односторонних связей, то соотношение (1) сводится к равенству

$$\delta L = 0 \tag{1'}$$

и называется *общим уравнением статики*.

10. Из соотношения (1) можно вывести два следствия.

1) Если к системе активных сил Σ, способных удерживать данную материальную систему S в равновесии, присоединяется другая система сил Σ', также способная удерживать S в равновесии, то результирующая система сил $\Sigma + \Sigma'$ (т. е. система, составленная из сил систем Σ и Σ') также удовлетворяет условиям равновесия.

2) Если материальная система S_1 отличается от системы S наличием некоторых добавочных связей и если некоторая система сил Σ удерживает S в равновесии, то тем более она будет удерживать в равновесии систему S_1. Действительно, виртуальные перемещения системы S_1 все содержатся среди виртуальных перемещений системы S; поэтому, если соотношение (1) удовлетворяется для всех виртуальных перемещений системы S, то тем более оно будет удовлетворяться для всех виртуальных перемещений системы S_1 (но не обратно). Если далее все связи двусторонние (или, в более общем

случае, когда рассматриваемая конфигурация системы не является предельной), то из соотношения (1′) выводим:

Если система активных сил, приложенных к материальной системе, находится в равновесии, то в равновесии будет находиться и система, составленная из тех же самых сил, но обращенных в противоположные стороны.

§ 3. Замечания о частных постулатах, введенных в статике твердых тел и нитей

11. Мы занимались уже подробно статикой твердого тела (гл. XIII).

Наше изложение основывалось, если не считать основных принципов механики, только на одном специальном постулате (гл. XIII, п. 1):

Равновесие твердого тела не нарушается, если к двум любым его точкам прикладываются две равные по величине и прямо противоположные силы.

Мы покажем сейчас, что это утверждение, введенное ранее как самостоятельный постулат ради удобства, т. е. ради возможности дать простое и элементарное изложение всей статики твердого тела, теоретически является лишь частным следствием принципа виртуальных работ.

Доказать это можно непосредственно. Достаточно с одной стороны заметить, что естественные твердые тела, к которым относится указанный выше характеристический постулат, должны (приближенно) рассматриваться как неизменяемые системы. С другой стороны, вспомним (п. 3), что сумма элементарных работ двух равных и прямо противоположных сил на всяком (бесконечно малом) перемещении, не изменяющем расстояния между точками приложения сил, равна нулю; это обстоятельство имеет место для всякого виртуального перемещения твердого тела.

После этого становится ясным, что если твердое тело (с какими угодно связями) находится в равновесии и, следовательно, сумма виртуальных работ различных активных сил $\delta L \leqslant 0$, то это же соотношение будет иметь место и после присоединения двух равных и прямо противоположных сил, так как сумма элементарных работ таких сил при всяком виртуальном перемещении твердого тела равна нулю.

12. Так как характеристический постулат статики твердого тела входит в принцип виртуальных работ, то в него должны входить также и его следствия, в частности условия, определяющие равновесие в различных случаях, рассмотренных в гл. XIII.

Укажем здесь коротко, как можно их снова найти, пользуясь общим соотношением статики.

Рассмотрим сначала свободное твердое тело, т. е. систему материальных точек, подчиненных исключительно связям неизменяемости;