случае, когда рассматриваемая конфигурация системы не является предельной), то из соотношения (1′) выводим:

Если система активных сил, приложенных к материальной системе, находится в равновесии, то в равновесии будет находиться и система, составленная из тех же самых сил, но обращенных в противоположные стороны.

§ 3. Замечания о частных постулатах, введенных в статике твердых тел и нитей

11. Мы занимались уже подробно статикой твердого тела (гл. XIII).

Наше изложение основывалось, если не считать основных принципов механики, только на одном специальном постулате (гл. XIII, п. 1):

Равновесие твердого тела не нарушается, если к двум любым его точкам прикладываются две равные по величине и прямо противоположные силы.

Мы покажем сейчас, что это утверждение, введенное ранее как самостоятельный постулат ради удобства, т. е. ради возможности дать простое и элементарное изложение всей статики твердого тела, теоретически является лишь частным следствием принципа виртуальных работ.

Доказать это можно непосредственно. Достаточно с одной стороны заметить, что естественные твердые тела, к которым относится указанный выше характеристический постулат, должны (приближенно) рассматриваться как неизменяемые системы. С другой стороны, вспомним (п. 3), что сумма элементарных работ двух равных и прямо противоположных сил на всяком (бесконечно малом) перемещении, не изменяющем расстояния между точками приложения сил, равна нулю; это обстоятельство имеет место для всякого виртуального перемещения твердого тела.

После этого становится ясным, что если твердое тело (с какими угодно связями) находится в равновесии и, следовательно, сумма виртуальных работ различных активных сил $\delta L \leqslant 0$, то это же соотношение будет иметь место и после присоединения двух равных и прямо противоположных сил, так как сумма элементарных работ таких сил при всяком виртуальном перемещении твердого тела равна нулю.

12. Так как характеристический постулат статики твердого тела входит в принцип виртуальных работ, то в него должны входить также и его следствия, в частности условия, определяющие равновесие в различных случаях, рассмотренных в гл. XIII.

Укажем здесь коротко, как можно их снова найти, пользуясь общим соотношением статики.

Рассмотрим сначала свободное твердое тело, т. е. систему материальных точек, подчиненных исключительно связям неизменяемости;

пусть тело находится под действием данных активных сил. Вспомним сначала, что, выбрав за центр приведения какую-нибудь точку O, неизменно связанную с телом, мы получим наиболее общее виртуальное перемещение какой нибудь точки P_i в виде (гл. VI, п. 16)

$$\delta P_i = \delta O + \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OP_i},$$

где δO и $\boldsymbol{\omega}'$ обозначают два произвольных бесконечно малых вектора (виртуальное перемещение полюса O и виртуальное вращение вокруг точки O).

Поэтому если $\boldsymbol{F}_i$ есть равнодействующая сил, прямо приложенных к точке P_i, то виртуальная работа активных сил определится равенством

$$\delta L = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot [\delta O + \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OP_i}];$$

раскрыв скобки и приняв во внимание векторное тождество (гл. I, п. 25)

$$\boldsymbol{F}_i \cdot [\boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OP_i}] = \boldsymbol{\omega}' \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i],$$

мы приведем полученное равенство к виду

$$\delta L = \delta O \cdot \sum_i \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\omega}' \cdot \sum_i \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i.$$

Обозначив результирующую активных сил и их результирующий момент относительно точки O, входящие в последнее равенство, соответственно через $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$, мы получим общее выражение для виртуальной работы активных сил

$$\delta L = \delta O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{M},$$

которое, как мы видим, зависит от $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{M}$, а также и от характеристических векторов δO и $\boldsymbol{\omega}'$ виртуального перемещения.

Так как здесь рассматриваются лишь связи, обеспечивающие неизменяемость системы, которые не могут допускать необратимых виртуальных перемещений, то можно воспользоваться общим уравнением статики; таким образом, мы приходим к заключению, что для равновесия необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\delta O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{M} = 0$$

при каком угодно выборе характеристических векторов δO и $\boldsymbol{\omega}'$, что равносильно двум условиям

$$\boldsymbol{R} = 0, \qquad \boldsymbol{M} = 0;$$

эти условия совпадают с теми, которые мы уже нашли в качестве основных условий равновесия свободного твердого тела в п. 3 гл. XIII, так как в рассматриваемом случае активные силы являются в то же время внешними и, наоборот, все внешние силы являются только активными.

В случае твердого тела, закрепленного в одной точке, выбрав полюс в этой точке, мы можем выразить самое общее виртуальное перемещение точки P_i (гл. VI, п. 17) в виде

$$\delta P_i = \omega' \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

и, следовательно, будем иметь

$$\delta L = \omega' \times \boldsymbol{M}.$$

Так как бесконечно малый вектор ω' является совершенно произвольным, то обращение в нуль δL равносильно условию $\boldsymbol{M} = 0$, которое было получено прямым путем в п. 5 гл. XIII как необходимое и достаточное условие равновесия твердого тела в этом случае.

Подобным же образом мы можем снова найти условие равновесия для твердого тела с закрепленной осью (гл. XIII, п. 8), между тем как в случае тяжелого твердого тела, опирающегося на другие тела (гл. XIII, § 4), благодаря наличию односторонних связей мы получим условия равновесия, применив вместо общего уравнения общее соотношение статики $\delta L \leqslant 0$.

13. Не бесполезно отметить, что в то время как силы, входящие в выражение виртуальной работы δL, в общем соотношении статики *все* являются только *активными*, в элементарной статике (гл. XII, § 3) основные уравнения содержали *внешние силы*; потом из основных уравнений исключались реакции *связей*, поэтому окончательные условия равновесия содержат силы, которые являются одновременно *активными* (т. е. не происходящими от связей) и *внешними*.

Может показаться, что силы, рассмотренные обоими методами, не являются одними и теми же и что элементарный метод вводит только часть тех сил, которые участвуют в образовании δL.

Строго говоря, это действительно так; но речь идет о несущественном различии, потому что возможные *внутренние* активные силы, будучи попарно равными и прямо противоположными, ничего не прибавляют к δL (см. п. 3, „в“) и, следовательно, от них можно отвлечься.

Поэтому из формального тождества окончательных условий равновесия (даваемых для различных случаев обоими методами), можно заключить о полном их совпадении, рассматривая в них только *внешние активные силы*.

14. Наконец, укажем еще, не приводя доказательства, что, исходя из принципа виртуальных работ, можно построить статику гибких и нерастяжимых нитей, полученную нами (гл. XIV) как предельный случай статики стержневых систем на основе очевидного специального постулата (гл. XIV, § 7), если выразить аналитически все перемещения нити, совместимые с нерастяжимостью ее элементов. Это приводит, как показал Лагранж, к введению (сначала как вспомогательного элемента вычислений) функции T точек нити, которая потом истолковывается как натяжение; в конце концов этим путем мы приходим к тем же самым векторным соотношениям, которые были уже найдены в упомянутой главе [неопределенное уравнение (42) и условия на концах (43)].

§ 4. Статика систем, находящихся под действием силы тяжести. Принцип Торричелли [1]

15. Рассмотрим произвольную материальную систему S и предположим, что активные силы, действующие на нее, сводятся к весам отдельных ее элементов.

Если предположим, что ось z вертикальна и направлена вниз, и обозначим через m_i массу произвольного элемента P_i, то сила $\boldsymbol{F}_i$, приложенная к P_i, будет иметь проекциями

$$0,\ 0;\ m_i g.$$

Обозначим через δx_i, δy_i, δz_i проекции перемещения δP_i, испытываемого точкой P_i при любом виртуальном перемещении системы.

Виртуальная работа активных сил, очевидно, сводится к выражению

$$\delta L = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i = g \sum_i m_i \delta z_i,$$

где сумма распространяется на все точки P_i, составляющие систему.

Введем координату центра тяжести G системы

$$z_0 = \frac{\sum\limits_i m_i z_i}{m},$$

где m есть масса системы.

[1] Эванджелиста Торричелли родился в Фаенце в 1608 г., умер в Фиренце в 1647 г. После изучения в Романье гуманитарных и естественных наук отправился в Рим для усовершенствования под руководством Кастелли, ученика и друга Галилея. В 1641 г. он был приглашен Кастелли в Арчетри к его учителю, уже старому, слепому и больному, где помогал ему подготовлять к печати еще не опубликованные сочинения. Спустя три месяца Галилей умер, и Торричелли стал его наследником по должности математика герцога тосканского. Торричелли был крупным геометром, но последующим поколениям известен главным образом своими открытиями в механике, среди которых нужно назвать принцип, приведенный в тексте, открытие атмосферного давления, изобретение барометра и формулу истечения тяжелой жидкости из сосуда через отверстие. Эта формула содержится в мемуаре „De motu gravium naturaliter descendentium".