случай статики стержневых систем на основе очевидного специального постулата (гл. XIV, § 7), если выразить аналитически все перемещения нити, совместимые с нерастяжимостью ее элементов. Это приводит, как показал Лагранж, к введению (сначала как вспомогательного элемента вычислений) функции T точек нити, которая потом истолковывается как натяжение; в конце концов этим путем мы приходим к тем же самым векторным соотношениям, которые были уже найдены в упомянутой главе [неопределенное уравнение (42) и условия на концах (43)].

§ 4. Статика систем, находящихся под действием силы тяжести. Принцип Торричелли [1]

15. Рассмотрим произвольную материальную систему S и предположим, что активные силы, действующие на нее, сводятся к весам отдельных ее элементов.

Если предположим, что ось z вертикальна и направлена вниз, и обозначим через m_i массу произвольного элемента P_i, то сила $\boldsymbol{F}_i$, приложенная к P_i, будет иметь проекциями

$$0,\ 0;\ m_i g.$$

Обозначим через δx_i, δy_i, δz_i проекции перемещения δP_i, испытываемого точкой P_i при любом виртуальном перемещении системы.

Виртуальная работа активных сил, очевидно, сводится к выражению

$$\delta L = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i = g \sum_i m_i \delta z_i,$$

где сумма распространяется на все точки P_i, составляющие систему.

Введем координату центра тяжести G системы

$$z_0 = \frac{\sum_i m_i z_i}{m},$$

где m есть масса системы.

[1] Эванджелиста Торричелли родился в Фаенце в 1608 г., умер в Фиренце в 1647 г. После изучения в Романье гуманитарных и естественных наук отправился в Рим для усовершенствования под руководством Кастелли, ученика и друга Галилея. В 1641 г. он был приглашен Кастелли в Арчетри к его учителю, уже старому, слепому и больному, где помогал ему подготовлять к печати еще не опубликованные сочинения. Спустя три месяца Галилей умер, и Торричелли стал его наследником по должности математика герцога тосканского. Торричелли был крупным геометром, но последующим поколениям известен главным образом своими открытиями в механике, среди которых нужно назвать принцип, приведенный в тексте, открытие атмосферного давления, изобретение барометра и формулу истечения тяжелой жидкости из сосуда через отверстие. Эта формула содержится в мемуаре „De motu gravium naturaliter descendentium".

Если z_i испытывают приращения δz_i, то z_0 получит приращение (вертикальное перемещение центра тяжести), определяемое равенством

$$\delta z_0 = \frac{\sum\limits_i m_i \delta z_i}{m}.$$

Выражение виртуальной работы может быть поэтому написано в виде

$$\delta L = mg\,\delta z_0,$$

так что условие равновесия $\delta L \leqslant 0$ сводится к соотношению

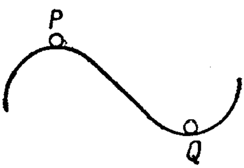
$$\delta z_0 \leqslant 0,$$

где равенство имеет силу для обратимых перемещений.

Поэтому для равновесия требуется, чтобы связи допускали для центра тяжести только такие перемещения, для которых будет иметь место соотношение $\delta z_0 \leqslant 0$, или, что одно и то же, для которых не может оказаться $\delta z_0 > 0$. Мы пришли, таким образом, к следующему результату (принцип Торричелли).

Для равновесия тяжелой системы необходимо и достаточно, чтобы ее центр тяжести не опускался ни при каком виртуальном перемещении системы (т. е. чтобы не было положительных приращений координаты z_0).

16. Полезно обратить внимание на то обстоятельство, что высказанный здесь принцип относится только к *бесконечно малым* виртуальным перемещениям. Поэтому из него нельзя заключить, что в положении равновесия высота центра тяжести должна быть в собственном смысле минимальной (т. е. координата z_0 должна быть максимальной). Рассмотрим этот вопрос точнее, предположив для определенности, что все связи двусторонние. Условие равновесия будет тогда иметь вид $\delta z_0 = 0$.



Фиг. 70.

С другой стороны, как известно из анализа, для того чтобы функция имела максимум или минимум, требуется не только, чтобы обращался в нуль ее первый дифференциал (для системы значений, к которой относится максимум или минимум), но чтобы, кроме того, удовлетворялось дополнительное условие, относящееся ко второму дифференциалу. Между тем в случае равновесия тяжелой системы условие обращения в нуль первого дифференциала функции z_0 ($\delta z_0 = 0$) удовлетворяется, но ничего не известно о втором дифференциале.

Поэтому равновесие может существовать и без того, чтобы высота центра тяжести была действительно минимумом; в частности она может оказаться максимумом.

Это можно сделать очевидным, например, в случае тяжелой точки, опирающейся на поверхность без трения: из двух положений равновесия P, Q, указанных на фиг. 70, первое соответствует, очевидно, максимуму, второе — минимуму высоты центра тяжести.

17. Заметим, что более ограничивающее условие, заключающееся в том, что координата z_0 должна иметь действительный минимум, т. е. что центр тяжести должен находиться в самом нижнем положении, совместимом со связями, обеспечивает одновременно существование равновесия и его устойчивость. В этом случае, действительно, можно утверждать, что при всяком достаточно малом перемещении системы, совместимом со связями, центр тяжести поднимается. Отсюда следует, что при возвращении к положению равновесия активные силы (которые здесь сводятся к весам отдельных элементов) совершают положительную полную работу.

Условие устойчивости в статическом смысле, определенное в п. 18 гл. IX, поэтому удовлетворяется.

§ 5. Статика системы с полными связями. Простые машины

18. Мы знаем, что системой с *полными связями* называется всякая голономная система с одной только степенью свободы (т. е. система, имеющая только одну лагранжеву координату) и со связями, не зависящими от времени. Такой, например, будет точка, вынужденная оставаться на заданной кривой, твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, винт в соответствующей гайке и т. д.

Перемещения δP_i отдельных точек системы и, в частности, их проекции δl_i на линии действия сил $\boldsymbol{F}_i$ определяются (для любой конфигурации) приращением δq единственной лагранжевой координаты.

С другой стороны (так как в рассматриваемом случае не может быть необратимых перемещений), общее условие равновесия будет выражаться уравнением (1′), которое в настоящем случае можно написать в виде

$$\delta L = \sum_i F_i \, \delta l_i = 0. \tag{4}$$

Оно, очевидно, равносильно единственному условию, которое мы получим, если приравняем нулю коэффициент при произвольной вариации δq.

19. Простые машины. Между системами с полными связями заслуживают специального упоминания так называемые ***простые машины*** (рычаг, наклонная плоскость, клин, винт и т. п.) и весы. Условия их равновесия можно исследовать прямым путем, анализируя, если надо, поведение отдельных частей (чаще всего твердых