Это можно сделать очевидным, например, в случае тяжелой точки, опирающейся на поверхность без трения: из двух положений равновесия P, Q, указанных на фиг. 70, первое соответствует, очевидно, максимуму, второе — минимуму высоты центра тяжести.

17. Заметим, что более ограничивающее условие, заключающееся в том, что координата z_0 должна иметь действительный минимум, т. е. что центр тяжести должен находиться в самом нижнем положении, совместимом со связями, обеспечивает одновременно существование равновесия и его устойчивость. В этом случае, действительно, можно утверждать, что при всяком достаточно малом перемещении системы, совместимом со связями, центр тяжести поднимается. Отсюда следует, что при возвращении к положению равновесия активные силы (которые здесь сводятся к весам отдельных элементов) совершают положительную полную работу.

Условие устойчивости в статическом смысле, определенное в п. 18 гл. IX, поэтому удовлетворяется.

§ 5. Статика системы с полными связями. Простые машины

18. Мы знаем, что системой с *полными связями* называется всякая голономная система с одной только степенью свободы (т. е. система, имеющая только одну лагранжеву координату) и со связями, не зависящими от времени. Такой, например, будет точка, вынужденная оставаться на заданной кривой, твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, винт в соответствующей гайке и т. д.

Перемещения δP_i отдельных точек системы и, в частности, их проекции δl_i на линии действия сил $\boldsymbol{F}_i$ определяются (для любой конфигурации) приращением δq единственной лагранжевой координаты.

С другой стороны (так как в рассматриваемом случае не может быть необратимых перемещений), общее условие равновесия будет выражаться уравнением (1′), которое в настоящем случае можно написать в виде

$$\delta L = \sum_i F_i\, \delta l_i = 0. \tag{4}$$

Оно, очевидно, равносильно единственному условию, которое мы получим, если приравняем нулю коэффициент при произвольной вариации δq.

19. Простые машины. Между системами с полными связями заслуживают специального упоминания так называемые *простые машины* (рычаг, наклонная плоскость, клин, винт и т. п.) и весы. Условия их равновесия можно исследовать прямым путем, анализируя, если надо, поведение отдельных частей (чаще всего твердых тел) и вводя в виде вспомогательных величин взаимные реакции этих частей.

Однако если отвлечься от трения, то очень быстро можно достигнуть цели, обращаясь к принципу виртуальных работ. Этот принцип дает условие равновесия в его окончательной форме, без упомянутого выше введения и последовательного исключения вспомогательных реакций, которое требуется при элементарном способе и которое может стать очень затруднительным, если система состоит из многих частей.

Обычно, как в простых машинах, так и в весах, активные силы сводятся к двум силам $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, соответственно называемым *силой* и *сопротивлением*. Предположим, что системе дано единственное бесконечно малое перемещение, совместимое со связями, и напишем условие равновесия

$$F_1\,\delta l_1 + F_2\,\delta l_2 = 0, \tag{5}$$

которое можно представить в конечной форме, если принять во внимание, что в пределе отношение $\delta l_2/\delta l_1$ зависит только от природы системы и от рассматриваемой конфигурации равновесия.

Если заметим, что δl_1 и δl_2, взятые по абсолютной величине, измеряют перемещения точек приложения сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ в направлении соответствующих линий действия, то из равенства (5) (или, лучше, из пропорции

$$F_1 : F_2 = |\delta l_2| : |\delta l_1|,$$

которая является его непосредственным следствием) получим так называемое *золотое правило:* „То, что выигрывается в силе, теряется в пути“.

Приложим предыдущие общие рассуждения к изучению *винтового пресса*, весов Квинтенца (или десятичных), и бифилярного маятника, отсылая за сведениями о других простых машинах и о других типах весов к более полным сочинениям [1]).

20. Винтовой пресс. Винт, вставленный в соответствующую гайку, представляет собой систему с полными связями. Рассмотрим любое бесконечно малое его перемещение, которое является вместе с тем и виртуальным перемещением, так как связи в этом случае не зависят от времени. Это перемещение, очевидно, может рассматриваться как результирующее двух других: элементарного поступательного перемещения в направлении оси (винта) и элементарного вращательного перемещения вокруг оси.

[1]) См., например, П. Аппелль, Руководство теоретической (рациональной) механики, т. I, гл. VIII, п. 169, 1911 и руководство E. Bagnoli, Teoria e costruzione degli strumenti metrici e per pesare, изд. 2, Милан, 1925.

Обозначив через δs_0 величину первого, через $\delta\omega$ величину второго и через p шаг винта, легко увидим, что

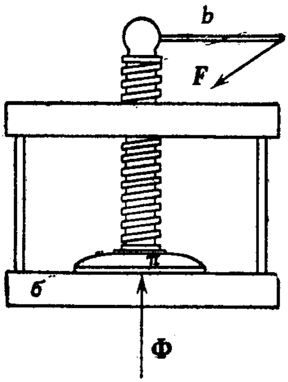
$$\delta\omega : \delta s_0 = 2\pi : p.$$

Действительно, когда винт делает полный оборот, он продвигается на один шаг p в направлении оси; с другой стороны, связь заставляет тело вращаться и двигаться поступательно вдоль оси при постоянном отношении между величинами поворота и поступательного перемещения (идет ли речь о бесконечно малом перемещении, или о полном повороте).

Отсюда следует уже написанная пропорция, или соотношение

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{p}\,\delta s_0. \tag{6}$$

21. Предположим, далее, что винт находится в равновесии, нажимая посредством пластинки π (фиг. 71) на часть плоской поверхности σ, нормальной к оси, как это схематически происходит в прессе, и пусть винт находится под действием силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к концу рукоятки и нормальной к оси. Для того чтобы иметь дело с самым обыкновенным случаем, предположим еще, что сила $\boldsymbol{F}$ действует нормально к плоскости, определяемой рукояткой и осью, и что собственным весом системы можно пренебречь (по сравнению с величиной силы $\boldsymbol{F}$). Таким образом, мы будем иметь следующие активные силы: 1) сила $\boldsymbol{F}$; 2) сопротивление, состоящее из совокупности давлений (реакций), которые испытывает пластинка π винта со стороны сжатой поверхности σ. Результирующая всех этих различных реактивных давлений естественно будет равна и противоположна полному давлению, действующему на σ: обозначим ее абсолютное значение через Ф.



Фиг. 71.

Предположим, что мы сообщили системе виртуальное перемещение, вращая рукоятку в одном из двух возможных направлений, например в том, в котором ее стремится вращать сила $\boldsymbol{F}$. Это перемещение можно разбить на два: поступательное и вращательное. Оценим соответствующие части виртуальной работы различных сил. При поступательном перемещении винта работа силы $\boldsymbol{F}$, по предположению, перпендикулярной к оси, равна нулю; давления на пластинку (которые стремятся заставить винт вращаться в противоположную сторону) все совершают отрицательную работу, в сумме равную $-\Phi\,\delta s_0$.

При вращательном перемещении (вокруг оси винта) работа давлений, очевидно, равна нулю; что же касается силы $\boldsymbol{F}$, то, ввиду того что перемещение ее точки приложения идет в направлении силы, работа будет положительной и будет измеряться произведением $\boldsymbol{F}$ на величину перемещения. Таким образом, будем иметь $Fb\delta\omega$, где через b обозначена длина рукоятки. Подставляя вместо элементарного вращения $\delta\omega$ его величину (6), мы получим для полной виртуальной работы выражение

$$Fb\,\frac{2\pi}{p}\,\delta s_0 - \Phi\delta s_0,$$

так что условие равновесия будет выражено равенством

$$\Phi = \frac{2\pi}{p}\,Fb. \tag{7}$$

Как мы видим, оно не зависит от размеров винта (радиуса цилиндра, на который нанесена винтовая нарезка), а зависит от шага p. Для того чтобы произвести большие давления умеренными силами, нужно, очевидно, уменьшить насколько возможно p и увеличить длину рукоятки.

22. Если помимо $\boldsymbol{F}$ на головку винта действует другая аналогичная сила $\boldsymbol{F}'$ (также нормальная к плоскости, проходящей через ось винта и через соответствующую точку приложения и стремящаяся вращать винт в ту же сторону, что и сила $\boldsymbol{F}$) и b' есть соответствующая рукоятка, то вместо (7) мы тотчас же находим уравнение

$$\Phi = \frac{2\pi}{p}\,\{Fb + F'b'\}.$$

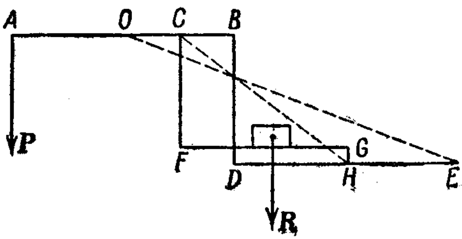
Количество, стоящее в скобках, можно истолковывать как результирующий момент сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ относительно оси или как результирующий момент всех активных сил, так как момент давлений равен нулю; давление Φ, стоящее в левой части, можно рассматривать как результирующую в направлении оси всех активных сил (так как силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ ничего не прибавляют к ней).

Обозначая, как обычно, через $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ результирующую силу и результирующий момент (относительно какой-нибудь точки на оси) всех активных сил и через $\boldsymbol{r}$ направление оси (в одну из двух сторон, выбранную как угодно), мы можем написать найденное условие равновесия в виде

$$R_r = \frac{2\pi}{p}\,M_r.$$

Было бы очень просто убедиться (припоминая общее выражение δL, приведенное в п. 12, и применяя его к винтовому перемещению, о котором идет речь), что условие равновесия сохраняет этот вид в общем случае, т. е. каково бы ни было число активных сил, приложенных к винту, их величина и направление.

23. Весы Квинтенца. Кинематическую структуру таких весов можно схематически описать следующим образом: коромысло AB (фиг. 72), которое может вращаться вокруг одной своей точки O (лежащей между A и B), связано в конце B и в некоторой точке C, лежащей между O и B, посредством двух вертикальных стержней с двумя платформами DE, FG, первая из которых опирается на неподвижное ребро E, а вторая — на ребро HG, прикрепленное к нижней платформе. Обе платформы будут горизонтальными, если горизонтально коромысло.



Фиг. 72.

Пренебрегая весами коромысла, соединяющих стержней и платформ, представим себе, что на верхнюю платформу FG положено тело веса R (сопротивление), и предположим, что нам надо определить, какой вес P (силу) необходимо приложить в A, чтобы удержать плечо в горизонтальном положении. Мы имеем здесь, очевидно, систему с полными связями, и ее виртуальное перемещение (для конфигурации, в которой коромысло горизонтально) однозначно определяется углом $\delta\theta$, описываемым коромыслом вокруг точки O. Перемещение точки A приложения веса P (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равно $OA\cdot\delta\theta$. Перемещение точки приложения веса R (центра тяжести тела, которое нужно *взвесить*), тоже вертикальное, но направленное в противоположную сторону, вообще говоря, зависит от положения, которое тело занимает на платформе FG; но легко видеть, что, подбирая надлежащим образом положение H ребра HG на нижней платформе DE, можно сделать так, чтобы это перемещение центра тяжести тела не зависело от его положения на FG. Очевидно, что, для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы при виртуальном перемещении платформа FG сохраняла горизонтальное положение, или, другими словами, чтобы точки F и G испытывали равные перемещения. Далее, в то время как точка F испытывает то же самое перемещение, что и точка C, т. е. $OC\cdot\delta\theta$ — перемещение точки G равно перемещению точки H, а это последнее, поскольку точка E неподвижна, получится (в силу пропорциональности между дугами, соответствующими одному и тому же углу, и радиусами), если мы умножим на HE/DE перемещение точки D или перемещение точки B, которое определяется произведением $OB \cdot \delta\theta$. В результате верхняя платформа будет оставаться горизонтальной при условии, что будет выполняться равенство

$$\frac{HE}{DE} OB \cdot \delta\theta = OC \cdot \delta\theta,$$

или

$$\frac{HE}{DE} = \frac{OC}{OB},$$

т. е., что две прямые OE и CH будут пересекаться в точке, лежащей на прямой BD.

При этом предположении для существования равновесия необходимо и достаточно, на основании общего уравнения статики, чтобы было

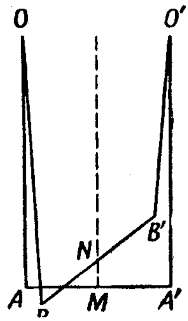
$$P \cdot OA \cdot \delta\theta - R \cdot OC \cdot \delta\theta = 0$$

или

$$P : R = OC : OA.$$

Таким образом, мы имеем то же самое условие равновесия, которое имело бы место, если бы вес R был приложен прямо в точке C.

Заметим, что способ, аналогичный тому, который мы здесь применили, позволяет также и для обыкновенных весов Роберваля[1]) показать независимость условия равновесия от положения, занимаемого грузами на чашках.



Фиг. 73.

24. Бифилярный маятник. Представим себе тяжелый твердый однородный стержень AA' (фиг. 73) длиной $2a$, удерживаемый в горизонтальном положении двумя гибкими и нерастяжимыми нитями длиной l, прикрепленными соответственно к концам A, A' стержня и к двум неподвижным точкам O, O', расстояние OO' между которыми равно длине $2a$ стержня. Система располагается в вертикальной плоскости, проходящей через точки O, O', принимая конфигурацию четырехугольника $AA'OO'$.

Если к стержню AA' в горизонтальной плоскости, проходящей через AA', прикладывается пара с заданным моментом Γ, то стержень, оставаясь горизонтальным, повернется на некоторый угол φ (в направлении действующей пары) вокруг вертикали, проходящей через его середину, в то время как та точка, которая сначала

[1]) Ж. П. де Роберваль родился в 1602 г. близ Бове, департамент Уазы, умер в 1675 г. в Париже, был профессором в College reale de France. Написал трактат о неделимых, с геометрическими приложениями к построению касательной. Занимался алгеброй и механикой и известен благодаря изобретению весов, носящих его имя (1670 г.).

была в M, займет положение точки N этой вертикали, поднявшись на некоторую высоту $MN = h$ над своим первоначальным положением M (так как нити OA и $O'A'$ нерастяжимы).

Определим условие, при котором сохраняется состояние равновесия стержня, предполагая, что весом нитей можно пренебречь. Для этого заметим прежде всего, что, в силу симметрии системы и действующих сил относительно вертикали точки M центр тяжести стержня, как мы только что отметили, останется на этой вертикали, а сам стержень будет находиться в горизонтальном положении; поэтому эту систему можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. С этой точки зрения виртуальное перемещение (для указанной конфигурации равновесия) будет определяться вариацией δh высоты h точки N относительно точки M и вариацией $\delta\varphi$ угла между BB' и AA'. Для определения соотношения между δh, $\delta\varphi$ возьмем начало координат в точке M, ось z направим по вертикали MN, ось x — по прямой MA, ось y — по перпендикуляру к плоскости xz, направленному таким образом, чтобы направление вращения от x к y совпадало с направлением действия приложенной пары. Тогда, выразив, что расстояние между двумя точками O, B с координатами соответственно a, 0, l и $a\cos\varphi$, $a\sin\varphi$, h остается равным l, мы найдем

$$a^2\{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\}+(h-l)^2=l^2$$

или

$$4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+h^2-2lh=0.$$

Отсюда, продифференцировав, получим

$$a^2\sin\varphi\,\delta\varphi+(h-l)\,\delta h=0,$$

т. е.

$$\delta h=\frac{a^2\sin\varphi}{l-h}\,\delta\varphi.$$

Работа пары (которую мы представим себе состоящей из двух противоположных сил величиной $\Gamma/2a$, приложенных соответственно в точках A, A', горизонтальных и перпендикулярных к стержню) равна

$$2\frac{\Gamma}{2a}\,a\,\delta\varphi=\Gamma\,\delta\varphi.$$

Общее уравнение статики дает условие равновесия в виде

$$\Gamma\,\delta\varphi-p\,\delta h=0,$$

откуда, на основании значения, полученного для δh,

$$\Gamma=\frac{a^2p\sin\varphi}{l-h}.$$