§ 6. Статика голономных систем с каким угодно числом степеней свободы. Условия равновесия в лагранжевых координатах

25. Мы будем рассматривать в этом параграфе голономную систему, состоящую из N точек P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, имеющую n степеней свободы. Относя ее к любой системе лагранжевых (независимых) координат q_h $(h=1, 2, \ldots, n)$, будем иметь

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \qquad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{8}$$

Так как всякое виртуальное перемещение

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \tag{9}$$

(где δq_h — произвольные и независимые вариации) будет здесь обратимым (гл. VI, п. 14), то необходимые и достаточные условия, для того чтобы система под действием данных сил $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ была в равновесии, можно получить из общего уравнения статики

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i = 0, \tag{10}$$

которое, если примем во внимание уравнения (9), принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h = 0,$$

или

$$\sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h = 0, \tag{10'}$$

если положим

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Уравнение (10′) должно иметь место при любом виртуальном перемещении системы, т. е. при всяком возможном выборе произвольных вариаций δq_h (в частности, когда все они принимаются равными нулю, за исключением одной); отсюда следует, что при равновесии должны одновременно удовлетворяться n уравнений

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \ldots, \qquad Q_n = 0. \tag{12}$$

Если, наоборот, эти уравнения удовлетворяются, то будет удовлетворяться также и уравнение (10′), а следовательно, и уравнение (10) при каком угодно выборе δq_h, т. е. при всяком виртуальном перемещении системы; таким образом, равновесие будет обеспечено.

Следовательно, необходимые и достаточные условия для равновесия рассматриваемой голономной системы выражаются n уравнениями (12).

26. Рассмотрим n скалярных величин Q_h, определяемых равенствами (11). Из этих равенств следует прежде всего, что величины Q_h будут равны нулю всякий раз, когда обращаются в нуль прямо приложенные силы $\boldsymbol{F}_i$; далее, когда голономная система сводится к N свободным точкам P_i, так что за независимые координаты можно принять декартовы координаты x_i, y_i, z_i этих точек, то Q_h принимают вид

$$\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial x_i}, \quad \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial y_i}, \quad \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

т. е. сводятся к проекциям X_i, Y_i, Z_i активных сил $\boldsymbol{F}_i$ на оси декартовых координат.

В виду этой аналогии (а также благодаря другим аналогиям между X_i, Y_i, Z_i и Q_h, которые мы сейчас укажем) величины Q_h обыкновенно называют *составляющими данной системы сил по лагранжевым координатам* q_h[1]).

27. Для того чтобы указать другие замечательные аналогии между лагранжевыми составляющими Q_h системы сил и проекциями X_i, Y_i, Z_i сил на декартовы оси координат, выясним сначала, в каком смысле должны считаться заданными, с математической точки зрения, активные силы $\boldsymbol{F}_i$, действующие на систему.

В согласии с тем, что было сказано в случае одной свободной материальной точки (гл. VII, § 8), система сил $\boldsymbol{F}_i$ (где $\boldsymbol{F}_i$ есть результирующая сил, действующих на точку P_i системы) в любой момент определяется в функции от конфигурации системы и от скоростей отдельных ее точек. Если мы примем во внимание равенства (8) и выражения, которые получаются из них для скоростей различных точек P_i

$$\dot{P}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

то увидим, что система сил должна считаться известной, когда каждый из векторов $\boldsymbol{F}_i$ задан в функции от обобщенных координат q_h, от обобщенных скоростей $\dot{q}_h$ [которые называются *скоростями* системы по лагранжевым координатам q_h (гл. VI, п. 10)] и, возможно, от времени.

---

[1]) Величины Q_h называют также обобщенными силами. (*Прим. ред.*)

В частности, система сил называется чисто *позиционной*, если силы $\boldsymbol{F}_i$ зависят только от конфигурации системы, т. е. только от величин q_h. В этом случае, как это следует из равенств (11), также и лагранжевы составляющие Q_h будут зависеть только от q_h; условия равновесия (12) дают тогда n уравнений между n координатами положения q_h, определяющими конфигурации равновесия системы, аналогично тому, как это имеет место в случае одной свободной точки, находящейся под действием позиционной силы, когда уравнения равновесия получают, приравнивая нулю проекции активной силы на декартовы оси координат.

28. Следуя дальнейшим аналогиям между силами X_i, Y_i, Z_i и Q_h, укажем, что система сил $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, приложенных к системе N материальных точек, называется *консервативной*, если сумма работ сил $\boldsymbol{F}_i$ на любом перемещении dP_i системы тождественна с полным дифференциалом какой-нибудь функции U от $3N$ декартовых координат x_i, y_i, z_i точек системы, т. е. когда имеем тождественно

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot dP_i = dU. \tag{13}$$

Так как это уравнение можно написать явно в виде

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i\,dx_i + Y_i\,dy_i + Z_i\,dz_i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\,dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\,dz_i\right),$$

то заключаем, приравнивая коэффициенты при дифференциалах (произвольных и независимых) dx_i, dy_i, dz_i, что оно эквивалентно $3N$ тождествам

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Функция U, определенная, по крайней мере, с точностью до аддитивной произвольной постоянной, называется, как и в случае только одной консервативной силы, *потенциалом* системы сил.

Далее, применяя тождество (13) к случаю виртуального перемещения, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i = \delta U$$

или, принимая во внимание равенства (9) и (11),

$$\sum_{h=1}^{N} Q_h\,\delta q_h = \delta U;$$

предполагая потенциал U выраженным посредством равенств (8) в функции от лагранжевых координат q_h и отождествляя коэффициенты при δq_h, получаем

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, \quad Q_n = \frac{\partial U}{\partial q_n}. \tag{14}$$

Поэтому мы можем сказать также, что и лагранжевы составляющие являются производными от потенциала.

Следует заметить, что предыдущее замечание необратимо, так как может случиться, что виртуальная работа на любом перемещении, совместимом со связями данной голономной системы,

$$\sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h$$

тождественно равна полному дифференциалу, а виртуальная работа на *совершенно произвольном перемещении*

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i$$

может и не быть такою.

Всякий раз, как лагранжевы составляющие Q_h имеют потенциал, из условий равновесия (12) и из тождеств (14) мы находим, что *всякому максимуму или минимуму потенциала соответствует конфигурация равновесия голономной системы.*

Если, далее, мы распространим на равновесие голономных систем *качественный критерий устойчивости*, указанный в п. 18 гл. IX, то увидим, что также и для этих систем *конфигурациями устойчивого равновесия являются те, которым соответствует максимальное значение потенциала.* Мы вернемся к этому заключению в динамике, где дадим ему более строгое обоснование.

29. В п. 25 мы определили условия равновесия голономной системы, отнесенной к независимым лагранжевым координатам. Можно спросить, как выражаются эти условия в том случае, когда прибегают, как это в некоторых случаях оказывается удобным, к избыточным координатам. Ответ на этот вопрос будет вытекать из рассуждений, которые мы изложим в следующем параграфе.

§ 7. Общая (аналитическая) статика. Метод множителей Лагранжа. Вычисление реакций

30. Для того чтобы иметь наиболее общие условия, рассмотрим материальную систему S из N точек P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, на которую наложены двусторонние и односторонние связи, как геометрические, так и кинематические. Мы знаем (гл. VI, п. 24), что если