предполагая потенциал U выраженным посредством равенств (8) в функции от лагранжевых координат q_h и отождествляя коэффициенты при δq_h, получаем

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, \quad Q_n = \frac{\partial U}{\partial q_n}. \tag{14}$$

Поэтому мы можем сказать также, что и лагранжевы составляющие являются производными от потенциала.

Следует заметить, что предыдущее замечание необратимо, так как может случиться, что виртуальная работа на любом перемещении, совместимом со связями данной голономной системы,

$$\sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h$$

тождественно равна полному дифференциалу, а виртуальная работа на *совершенно произвольном перемещении*

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i$$

может и не быть такою.

Всякий раз, как лагранжевы составляющие Q_h имеют потенциал, из условий равновесия (12) и из тождеств (14) мы находим, что *всякому максимуму или минимуму потенциала соответствует конфигурация равновесия голономной системы.*

Если, далее, мы распространим на равновесие голономных систем *качественный критерий устойчивости*, указанный в п. 18 гл. IX, то увидим, что также и для этих систем *конфигурациями устойчивого равновесия являются те, которым соответствует максимальное значение потенциала.* Мы вернемся к этому заключению в динамике, где дадим ему более строгое обоснование.

29. В п. 25 мы определили условия равновесия голономной системы, отнесенной к независимым лагранжевым координатам. Можно спросить, как выражаются эти условия в том случае, когда прибегают, как это в некоторых случаях оказывается удобным, к избыточным координатам. Ответ на этот вопрос будет вытекать из рассуждений, которые мы изложим в следующем параграфе.

§ 7. Общая (аналитическая) статика. Метод множителей Лагранжа. Вычисление реакций

30. Для того чтобы иметь наиболее общие условия, рассмотрим материальную систему S из N точек P_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), на которую наложены двусторонние и односторонние связи, как геометрические, так и кинематические. Мы знаем (гл. VI, п. 24), что если система S отнесена к системе осей $Oxyz$, то виртуальные перемещения δP_i системы для какой угодно конфигурации и момента времени должны удовлетворять следующим r уравнениям, соответствующим двусторонним связям, и s неравенствам (включающим и равенства), соответствующим односторонним связям:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_{ki} \cdot \delta P_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_{ji} \cdot \delta P_i \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \quad (16)$$

где $\boldsymbol{a}_{ki}$, $\boldsymbol{\alpha}_{ji}$ обозначают $(r+s)N$ определенных (чисто позиционных) векторов. Левые части этих $(r+s)$ соотношений после выполнения вычислений будут линейными однородными функциями от проекций δx_i, δy_i, δz_i перемещений δP_i всех N точек системы. Обозначим для простоты левые части соотношений (15), (16) соответственно через B_k, U_j; обозначая через a'_{ki}, a''_{ki}, a'''_{ki} и α'_{ji}, α''_{ji}, α'''_{ji} соответственно проекции векторов $\boldsymbol{a}_{ki}$ и $\boldsymbol{\alpha}_{ji}$ на оси $Oxyz$, получим

$$\left.\begin{aligned} B_k &= \sum_{i=1}^{N} (a'_{ki}\,\delta x_i + a''_{ki}\,\delta y_i + a'''_{ki}\,\delta z_i), \\ U_j &= \sum_{i=1}^{N} (\alpha'_{ji}\,\delta x_i + \alpha''_{ji}\,\delta y_i + \alpha'''_{ji}\,\delta z_i). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Соотношения (15), (16) можно поэтому написать в более сжатой форме:

$$B_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \quad (15')$$

$$U_j \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \quad (16')$$

Если система S подвергается действию системы сил, в которой $\boldsymbol{F}_i$ является равнодействующей сил, прямо приложенных к точке P_i, то условия равновесия, благодаря тому, что наличие односторонних связей (16) означает для системы S возможность необратимых виртуальных перемещений, будут даны общим соотношением статики, а именно: для равновесия системы S необходимо и достаточно, чтобы для всех перемещений, определяемых соотношениями (15), (16), силы $\boldsymbol{F}_i$ удовлетворяли условию

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i \leqslant 0. \quad (18)$$

Далее, легко видеть, что мы будем в состоянии обсуждать задачу о равновесии системы S, когда будем иметь наиболее общие выражения для N сил $\boldsymbol{F}_i$, удовлетворяющих соотношению (18) на всех перемещениях, определяемых соотношениями (15), (16).

Действительно, получив такие общие выражения, мы сможем определить, является ли данная система сил $\boldsymbol{F}_i$ способной удержать систему S в равновесии, проверив, войдет ли она в эти общие выражения при надлежащем выборе содержащихся в них произвольных постоянных.

31. Обратимся поэтому к только что сформулированной задаче. Заметим прежде всего, что если среди односторонних связей (16) имеются только позиционные, то мы можем ограничиться рассмотрением системы только для тех конфигураций, которые являются предельными для каждой из этих связей (гл. VI, п. 21), так как в противном случае, по крайней мере, одно из условий (16) перестало бы быть действительным и мы имели бы аналогичную задачу с меньшим числом односторонних связей.

При таком предположении для сил $\boldsymbol{F}_i$ легко найти выражения, зависящие от произвольных постоянных и удовлетворяющие, при любом выборе этих постоянных, условиям равновесия (15), (16), (18). Действительно, взяв $r+s$ каких угодно постоянных величин $\lambda_k (k=1, 2, \ldots, r)$ и $\mu_j (j=1, 2, \ldots, s)$, положим[1])

$$\boldsymbol{F}_i = -\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ki} - \sum_{j=1}^{s} \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{ji}. \tag{19}$$

Сумму работ $\delta L = \sum_{k=1} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i$ этих сил $\boldsymbol{F}_i$ на любом перемещении δP_i можно выразить, принимая во внимание равенства (17), в виде

$$\delta L = -\sum_{k=1}^{r} \lambda_k B_k - \sum_{j=1}^{s} \mu_j U_j;$$

отсюда мы заключаем, что для всех виртуальных перемещений системы S, определяемых соотношениями (15′), (16′), силы $\boldsymbol{F}_i$, определенные выражением (19), действительно удовлетворяют условию равновесия (18), как бы ни были выбраны постоянные λ_k, но *при условии, чтобы постоянные μ_j все были отрицательными (или нулями).*

Таким образом, равенство (19) дает выражения для бесконечно большого числа систем сил, под действием которых рассматриваемая нами система будет находиться в равновесии.

Произвольные коэффициенты λ_k, μ_k (последние подчинены ограничениям $\mu_j \leqslant 0$) называются *множителями Лагранжа.*

[1]) В этих обозначениях знак минус поставлен для того, чтобы сохранить обозначения Лагранжа, который, исходя из своего принципа виртуальных скоростей и обращаясь впервые к систематическому использованию неопределенных множителей, пришел к условиям равновесия, эквивалентным условиям (19), но имеющим скалярную форму.

32. В рассуждениях предыдущего пункта остались нерешенными два вопроса:

а) Являются ли существенными в выражениях (19) множители λ_k, μ_j, в том смысле, что при изменении их будут изменяться также и соответствующие уравновешивающиеся системы сил $\boldsymbol{F}_i$?

б) Дают ли равенства (19) наиболее общую систему сил, способную удержать в равновесии систему S, т. е. получится ли всякая такая система сил из равенств (19) при надлежащем выборе множителей λ_k, μ_j?

Покажем, что легко ответить утвердительно на оба эти вопроса, если остановиться на вполне приемлемом для приложений предположении, что общее число $r+s$ связей (15), (16) меньше, чем $3N$, т. е. меньше числа составляющих вариаций δP_i и что уравнения

$$B_k = 0, \quad U_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s) \qquad (20)$$

независимы между собой.

Это последнее предположение означает, что никакое из уравнений (20) не является следствием остальных, или, другими словами, между левыми частями уравнений (20) не могут существовать тождества с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k B_k + \sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_j U_j = 0,$$

если не все множители равны нулю.

Отсюда получается ответ на вопрос „а". Действительно, если одна и та же уравновешивающаяся система сил $\boldsymbol{F}_i$ допускает два различных представления (19) (одно с множителями λ_k, μ_k, другое с множителями λ'_k, μ'_j), то путем вычитания мы получим N тождеств

$$\sum_{k=1}^{r} (\lambda_k - \lambda'_k)\, \boldsymbol{a}_{ki} + \sum_{j=1}^{s} (\mu_j - \mu'_j)\, \boldsymbol{\alpha}_{ji} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

которые, после умножения на δP_i и почленного сложения дали бы тождество

$$\sum_{k=1}^{r} (\lambda_k - \lambda'_k)\, B_k + \sum_{j=1}^{s} (\mu_j - \mu'_j)\, U_j = 0;$$

из этого тождества, вопреки предположению, следовали бы равенства

$$\lambda_k = \lambda'_k, \quad \mu_j = \mu'_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s).$$

Поэтому заключаем, что равенства (19) дают ∞ различных уравновешивающихся систем сил.

33. Переходя к вопросу „б" предыдущего пункта, заметим прежде всего, что с кинематической точки зрения уравнения (20) определяют только *обратимые* виртуальные перемещения системы S (для какой-либо ее предельной конфигурации). Уравнения (20) являются линейными и однородными по отношению к $3N$ неизвестным δx_i, δy_i, δz_i; так как, по предположению, число их меньше $3N$ и они между собой независимы, то существуют $n = 3N - r - s$ линейно независимых решений этих уравнений, так что общее решение получится посредством линейной комбинации этих n частных решений с n произвольными коэффициентами.

Этому общему решению мы можем придать наглядную и удобную форму, заметив, что каждое из n частных решений, рассмотренных выше, дает $3N$ проекций векторов δP_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, соответствующих какому-нибудь частному обратимому виртуальному перемещению системы S; обозначая через

$$\tau_1^{(p)}, \quad \tau_2^{(p)}, \ldots, \tau_N^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

(бесконечно малые) перемещения, получающиеся для точек P_1, $P_2, \ldots, P_N$ из n частных решений, мы можем представить общее решение уравнений (20), т. е. общее виртуальное обратимое перемещение системы S в виде

$$\delta P_i = \sum_{p=1}^{n} \nu_p \tau_i^{(p)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{21}$$

где ν_p обозначают n произвольных коэффициентов.

Самая общая система сил $\boldsymbol{F}_i$, способная удержать систему S в покое, должна обладать тем свойством, что полная работа ее на каждом из n обратимых перемещений $\tau_i^{(p)}$ должна быть равна нулю, так что должны тождественно удовлетворяться n уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \tau_i^{(p)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Эти уравнения составляют, конечно, только часть условий, определяющих все возможные уравновешивающиеся системы сил (при этом все еще не принимаются в расчет необратимые виртуальные перемещения), но они достаточны, чтобы убедиться, что всякая такая система сил входит в выражения (19) из п. 31.

Действительно, уравнения (22), образующие систему из n линейных однородных уравнений относительно неизвестных проекций X_i, Y_i, Z_i сил $\boldsymbol{F}_i$, являются, конечно, линейно независимыми, так как матрица их коэффициентов из n строк и $3N$ столбцов есть не что иное, как матрица n линейно независимых решений уравнений (20). Поэтому уравнения (22) имеют в свою очередь $3N - n = r + s$ линейно независимых решений и самое общее решение линейно зависит от $r + s$ существенных произвольных постоянных, как они появляются в выражении

$$\boldsymbol{F}_i = -\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ki} - \sum_{j=1}^{s} \mu_j \boldsymbol{a}_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

найденном прямым путем в п. 31.

Отсюда мы заключаем, что выражения (19), как это и было высказано выше, дают (при соблюдении ограничений $\mu_j \leqslant 0$, которые отражают еще не рассмотренные условия для сил $\boldsymbol{F}_i$) *наиболее общую* систему сил, способную удержать систему S в покое.

Это заключение, как уже говорилось в п. 30, кладется в основу определения, является ли заданная система сил уравновешивающейся на нашей материальной системе; достаточно будет проверить, войдет ли она в уравнения (19) при надлежащем выборе множителей λ_k и μ_j (при существенных условиях $\mu_j \leqslant 0$). Из замечания в п. 32 следует, что в утвердительном случае эти множители будут определены однозначно. Равенства (19) дадут в конечном счете *параметрическое решение* соотношения (18) в согласии с соотношениями (15), (16), и если примем во внимание только что сделанное замечание, то можно будет также сказать, что они составляют *условия равновесия* системы S в параметрической форме.

34. Применим эти условия к некоторым простым частным случаям.

Если речь идет только об одной точке P, вынужденной двигаться по поверхности (без трения)

$$f(x, y, z \mid t) = 0,$$

то виртуальные перемещения удовлетворяют единственному условию

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0,$$

так что имеется только одно уравнение вида (15′) (п. 30) и, следовательно, только один вектор $\boldsymbol{a}$, определяемый проекциями $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Поэтому параметрическое условие равновесия, если $\boldsymbol{F}$ есть равнодействующая активных сил, будет выражено в векторной форме равенством

$$\boldsymbol{F} = -\lambda \boldsymbol{a}$$

или в проекциях на декартовы оси координат равенствами

$$X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Если же, наоборот, точка P подчинена только односторонней связи

$$\varphi(x, y, z \mid t) \leqslant 0,$$

то мы должны иметь

$$X = -\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = -\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z = -\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

при $\mu \leqslant 0$.

Наконец, в случае точки, вынужденной оставаться на кривой без трения

$$f_1(x, y, z \mid t) = 0, \quad f_2(x, y, z \mid t) = 0,$$

мы будем иметь два уравнения типа (15′), следовательно, два вектора $\boldsymbol{a}$ и два множителя λ. Условия равновесия будут иметь вид

$$X + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0,$$

$$Z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

35. Возвратимся временно к ограничительным предположениям, допущенным в п. 32 о числе и независимости уравнений

$$B_k = 0, \quad U_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s). \tag{20}$$

Можно заранее считать, что уравнения $B_k = 0$, соответствующие двусторонним связям, независимы и что их меньше $3N$; действительно, мы можем не принимать во внимание те уравнения $B_k = 0$, которые случайно окажутся следствиями остальных, а число независимых между собой уравнений должно быть меньше $3N$, если мы хотим, чтобы система допускала, по крайней мере, одно виртуальное перемещение.

Однако этого нельзя сказать по отношению к уравнениям $U_j = 0$, которые выражают односторонние связи. Чтобы убедиться в этом, обратимся к элементарному примеру. Пусть мы имеем только одну материальную точку P, вынужденную не выходить из пределов выпуклого многогранного угла с s гранями и с вершиной в точке O, и хотим рассмотреть условия равновесия в положении O, которое, очевидно, является предельным для всех связей.

Величины U_j в таком случае являются линейными однородными формами от проекций δx, δy, δz любого виртуального перемещения точки P. Если мы предположим, что речь идет о действительном многогранном угле с числом граней, большим трех, то три (и только три) из форм U_j будут независимыми, в то время как ни одна из связей $U_j \leqslant 0$ не будет лишней.

Для изучения независимости между собой односторонних связей потребовалось бы более глубокое исследование, которым мы не будем заниматься.

36. Реакции. Как уже отмечалось с самого начала (п. 1) и было показано непосредственно в §§ 2—6 (в частности, в случае систем с полными связями), одно из главных преимуществ применения принципа виртуальных работ в статике заключается в том обстоятельстве, что он позволяет систематически исключать реакции и рассматривать одни только активные силы. Однако бывают такие случаи, в которых главный интерес задачи сосредоточен на определении этих реакций, или по крайней мере части их.

Мы покажем здесь, что метод множителей исчерпывающим образом отвечает этим требованиям.

Обратимся к случаю, вполне разобранному и объясненному в пп. 32—33, в котором для всякой системы сил, способной удерживать систему в покое, множители λ_k и μ_j определяются однозначно.

Мы знаем, что в этом предположении представление активных сил в форме

$$\boldsymbol{F}_i = -\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ki} - \sum_{j=1}^{s} \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \quad (19)$$

эквивалентно общему уравнению статики.

Если мы введем все реакции $\boldsymbol{R}_i$, появляющиеся в отдельных точках совокупности $r+s$ связей, которым подчинена система, то при равновесии для каждой точки P_i должно иметь место равенство

$$\boldsymbol{R}_i = -\boldsymbol{F}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Поэтому, принимая во внимание уравнения (19), мы получим для реакций выражения

$$\boldsymbol{R}_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ki} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \quad (23)$$

представляющие собой разложение каждой отдельной реакции в сумму $r+s$ составляющих.

Каждую из этих составляющих можно рассматривать как действие, оказываемое на соответствующую точку одной из $r+s$ связей

$$B_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \quad (15')$$

$$U_j \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \quad (16')$$

Чтобы убедиться в этом, обратим внимание на одну из связей, например на двустороннюю связь $B_1 = 0$, и заметим, что условия равновесия (19) нашей системы можно написать также в виде

$$\boldsymbol{F}_i + \lambda_1 \boldsymbol{a}_{1i} = -\sum_{k=2}^{r} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ki} - \sum_{j=1}^{s} \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

В этой форме их можно истолковать как условия равновесия новой системы S_1, подчиненной всем связям системы S, за исключением связи $B_1 = 0$, и находящейся под действием активных сил

$\boldsymbol{F}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_{1i}$. Введенные таким образом N дополнительных сил $\lambda_1 \boldsymbol{a}_{1i}$ эквивалентны действиям, оказываемым на точки P_i исключенной связью $B_1 = 0$, и потому представляют собой реакции, происходящие от этой связи.

Величина этой частичной реакции в любой точке P_i определяется выражением $|\lambda_1| a_{1i}$. Если, в частности, исключенная связь является позиционной и голономной

$$f(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\quad x_N,\ y_N,\ z_N\,|\,t) = 0, \tag{24}$$

так что уравнение $B_1 = 0$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = 0,$$

то составляющие $\lambda_1 a'_{1i}$, $\lambda_1 a''_{1i}$, $\lambda_1 a'''_{1i}$ реакции этой связи в точке P_i определяются выражениями

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i},\quad \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y_i},\quad \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z_i}\qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

поэтому величина реакции связи равна

$$|\lambda_1|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2},$$

а направление совпадает с направлением нормали к поверхности, которая будет представлена уравнением (24), если мы положим в нем t равным значению времени в рассматриваемый момент и заставим изменяться только координаты x_i, y_i, z_i, а координатам остальных точек системы припишем те значения, которые они имеют в рассматриваемом положении равновесия.

37. Способом, аналогичным тому, который был применен выше для двусторонней связи, мы можем выделить реакцию в любой точке P_i, происходящую от односторонней связи, например от связи $U_j \leqslant 0$, и найдем, что эта реакция равна $\mu_1 \boldsymbol{a}_{1i}$.

Если условие $U_i \leqslant 0$ происходит от позиционной связи

$$\varphi(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\quad x_N,\ y_N,\ z_N\,|\,t) \leqslant 0, \tag{25}$$

то ограничение для виртуальных перемещений

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) \leqslant 0$$

должно выполняться только для предельной конфигурации, т. е. для конфигурации, в которой соотношение (25) удовлетворяется, как равенство.

При этом предположении, реакция, происходящая от связи (25), будет иметь в точке P_i проекции

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}, \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_i},$$

так что, аналогично случаю двусторонней связи, реакция будет направлена по нормали к поверхности, представленной уравнением

$$\varphi(x_1, y_1, z_1; \ldots; \quad x_N, y_N, z_N | t) = 0,$$

куда, как и в уравнение (24), вместо t подставляется значение времени в рассматриваемый момент и вместо координат различных точек, за исключением точки P_i, для которой они остаются переменными, значения координат этих точек в конфигурации равновесия.

Так как при равновесии $\mu_1 \leqslant 0$, то реакция будет направлена в ту сторону от поверхности $\varphi = 0$, в которой функция от переменных x_i, y_i, z_i становится отрицательной, т. е. в сторону, допускаемую связью.

Так, например, если две точки P_1, P_2 соединены твердым стержнем или, в более общем случае, гибкой и нерастяжимой нитью длины l, то связь выразится соотношением

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leqslant l^2,$$

где в случае стержня будет иметь место только знак равенства. В конфигурации равновесия (при натянутой нити во втором случае, если мы хотим, чтобы в точках P_1, P_2 возникли реакции) реакция в каждой из двух точек будет направлена по прямой P_1P_2 (нормальной к сфере с центром в другой точке и с радиусом l), причем в случае нити реакция всегда направлена в сторону другой точки.

38. Выяснив, что векторы $\lambda_k \boldsymbol{a}_{ki}$, $\mu_j \boldsymbol{\alpha}_{ji}$ можно рассматривать как реакции, действующие на точку P_i со стороны отдельных связей $B_k = 0$ и $U_j \leqslant 0$, мы можем теперь дать наглядное истолкование условиям равновесия в форме (19). Написанные в виде

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ki} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{ji} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

они выражают, что *для равновесия системы с какими угодно связями* (лишь бы, конечно, связи были без трения) *необходимо и достаточно, чтобы прямо приложенные силы в любой точке уравновешивались соответствующими реакциями связей.*

В этой формулировке можно видеть обобщение того критерия, которым мы неоднократно пользовались в предыдущих главах, изучая различные частные случаи систем. Там мы определяли, основываясь на интуиции, характер реакций, которые были в состоянии развить связи. Здесь же поведение реакций характеризуется с одной общей точки зрения, на основании принципа виртуальных работ, который сам был установлен как раз путем синтеза отдельных частных случаев, изученных непосредственно по интуиции.

39. Прежде чем идти далее, вернемся временно к общему выражению (23) реакций, различные члены которого представляют собой, как мы видели в предыдущих пунктах, реакции в любой точке P_i системы, происходящие от отдельных двусторонних и односторонних связей, выражаемых соотношениями вида (15′), (16′). Следует обратить внимание на то, что особенности осуществления связей с аналитической точки зрения отражаются в той частной форме, которая была выбрана для уравнений (15′), (16′) из бесконечного множества эквивалентных ей форм, и что всякому такому выбору соответствует особое определение отдельных векторов $\boldsymbol{a}_{ki}$, $\boldsymbol{\alpha}_{ji}$. Мы видим, таким образом, что реакции, которые, согласно формуле (23), можно рассматривать как происходящие от отдельных связей, зависят от осуществления связей, в отличие от условий равновесия, которые, наоборот, не зависят от них (п. 7).

Очень простую иллюстрацию этого замечания дает эллипсограф, описанный в гл. V п. 15. Если связь, действующая, по предположению, без трения и вынуждающая точку P описывать эллипс, является именно той, которая описана там, то возбуждаются реакции $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, приложенные к концам стержня и нормальные соответственно к двум направляющим. Но если мы осуществляем ту же самую связь для стержня AB, вынуждая две другие его точки P, Q описывать без трения соответствующие эллипсы (удалив обе направляющие), то вместо реакций $(A, \boldsymbol{R}_A)$ и $(B, \boldsymbol{R}_B)$ возбуждаются две реакции $(P, \boldsymbol{R}_P)$ и $(Q, \boldsymbol{R}_Q)$, нормальные к двум эллипсам. Этот пример показывает, что местное распределение реакций действительно зависит от способа, посредством которого осуществляются связи; это означает, если речь идет о неизменяемой системе, что два приложенных вектора $(P, \boldsymbol{R}_P)$, $(Q, \boldsymbol{R}_Q)$ составляют систему, эквивалентную системе $(A, \boldsymbol{R}_A)$, $(B, \boldsymbol{R}_B)$.

40. Действительное вычисление реакций, происходящих от отдельных связей. Так как векторы $\boldsymbol{a}_{ki}$, $\boldsymbol{\alpha}_{ji}$ известны по заданию, то вычисление реакций $\lambda_k \boldsymbol{a}_{ki}$ или $\mu_j \boldsymbol{\alpha}_{ji}$, которые в различных точках P_i происходят от определенной связи ($B_k = 0$ или соответственно $U_j \leqslant 0$), сводится к определению соответствующих множителей λ_k или μ_j.

Способ, быстро ведущий к такой цели, вытекает из следующих соображений. Определим, например, реакцию $\lambda_1 \boldsymbol{a}_{1i}$, происходящую от двусторонней связи $B_1 = 0$. Так как, по предположению, уравнения

$$B_k = 0, \quad U_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s) \quad (20)$$

совместны и независимы, то такими же будут и уравнения

$$B_1 = \varepsilon, \tag{26}$$

$$B_k = 0, \quad U_j = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s), \tag{27}$$

где ε обозначает произвольную, бесконечно малую скалярную (но не равную нулю) величину. Поэтому мы можем указать бесконечно малое перемещение ∂P_i, удовлетворяющее этим уравнениям и представляющее собой, в силу самого своего определения, перемещение системы S, совместное со всеми связями, кроме связи $B_1 = 0$, реакцию которой требуется вычислить.

Умножая обе части равенства (19) на ∂P_i и суммируя по индексу i от 1 до N, мы получим, на основании уравнений (26), (27), уравнение

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \partial P_i = \lambda_1 \varepsilon, \tag{28}$$

которое непосредственно дает значение неизвестного множителя λ_1 и, следовательно, значение каждой из реакций $\lambda_1 \boldsymbol{a}_{1i}$, которые происходят от связи $B_1 = 0$.

Легко убедиться, что реакции определяются таким способом однозначно, т. е. они не зависят от выбора частного перемещения ∂P_i из числа тех, которые определяются уравнениями (26), (27). В самом деле, наиболее общее перемещение DP_i, удовлетворяющее этим уравнениям, получится, в силу известных свойств систем линейных уравнений, если мы присоединим к частному решению ∂P_i уравнений (26), (27) общее решение соответствующей однородной системы (20), т. е. самое общее обратимое виртуальное перемещение δP_i нашей системы. Вследствие этого

$$DP_i = \partial P_i + \delta P_i$$

и, на основании уравнений (20),

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot DP_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \partial P_i.$$

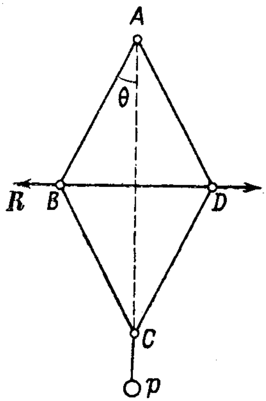
Аналогично можно поступить при определении каждого другого множителя, с единственной оговоркой, что если речь идет об одном из множителей μ_j (соответствующем односторонней связи), то, вследствие того, что условия равновесия будут удовлетворены, он должен получиться отрицательным (или равным нулю).

41. Механическое истолкование алгебраического способа, которым мы пользовались выше при определении множителя λ_1, очевидно. Рассмотрим, как это уже делалось в п. 36, систему S_1, которую мы получим из данной системы, уничтожая связь $B_1 = 0$ и причисляя к активным силам помимо $\boldsymbol{F}_i$ реакции $\lambda_1\boldsymbol{a}_{1i}$, происходящие от уничтоженной связи. Для такой системы обратимые виртуальные перемещения (для предельной конфигурации) определяются равенствами (27), так что наиболее общее перемещение DP_i, определяемое равенствами (26), (27), является обратимым виртуальным перемещением системы S_1, подчиненным условию не быть совместным с уничтоженной связью, вследствие того, что оно удовлетворяет условию, выраженному уравнением (26).

Если теперь к системе S_1 (и к системе активных сил $\boldsymbol{F}_i + \lambda_1\boldsymbol{a}_{1i}$) применим общее уравнение статики, составляя его для перемещения DP_i, то получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i + \lambda_1\boldsymbol{a}_{1i}) \cdot DP_i = 0,$$

которое, если примем во внимание уравнения (26), (27), совпадет с уравнением (28), полученным в предыдущем пункте для определения множителя λ_1. Таким образом, мы пришли к следующему правилу, которое, впрочем, очевидно с механической точки зрения. *Для определения реакций, происходящих от одной заданной связи, при заданных условиях действия сил, достаточно рассмотреть систему, которая получится, если мы уничтожим эту связь и к действующим активным силам присоединим соответствующие реакции, и применить общее уравнение статики для какого-нибудь виртуального перемещения новой системы, которое было бы несовместимо с отброшенной связью.*



Фиг. 74.

42. Применим предыдущее правило к одному простейшему примеру. Пусть имеются четыре равных твердых стержня, попарно соединенных шарнирами так, что они составляют ромб $ABCD$ (фиг. 74). Пусть этот ромб удерживается в заданной конфигурации пятым твердым стержнем, соединяющим B с D, так что угол $\widehat{BAC}$ равен θ. Если система подвешена на крюк в точке A и подвергается действию груза p в точке C, то она расположится так, что диагональ AC будет вертикальна.

Пусть требуется определить давление, испытываемое стержнем BD, если весом пяти стержней можно пренебречь.

Неизвестное давление, действующее на стержень в точке B, на основании принципа равенства действия и противодействия, равно и прямо противоположно реакции, которая там возникает со стороны стержня BD; то же самое можно сказать и о давлении в точке D, так что дело сводится к вычислению общей величины двух реакций в точках B и D.

Для этой цели, в согласии с правилом предыдущего пункта, достаточно рассмотреть стержневой ромб $ABCD$, получающийся из данной системы путем отбрасывания стержня BD и последующего присоединения к действующей силе, весу p, двух реакций в точках B и D, и применить общее уравнение статики к тому виртуальному перемещению ромба, которое сближает или удаляет две точки B и D. Такое перемещение определяется соответствующей вариацией угла θ; поэтому, обозначая через l общую длину четырех стержней ромба, будем иметь

$$BD = 2l \sin\theta, \qquad AC = 2l\cos\theta.$$

Общее уравнение статики принимает для этого перемещения вид

$$R\delta(2l\sin\theta) + p\delta(2l\cos\theta) = 0;$$

решая его относительно R, получим

$$R = p \operatorname{tg}\theta.$$

§ 8. Приложение к плоским неизменяемым фермам без лишних стержней

43. Согласно тому, что установлено в § 3 предыдущей главы, плоскую неизменяемую форму без лишних стержней можно рассматривать как систему из n материальных точек P_i с координатами x_i, y_i, которые связаны $m = 2n - 3$ уравнениями вида

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - l_{ij} = 0, \tag{29}$$

где индексы i, j относятся ко всем узлам P_i, P_j, действительно соединенным стержнями.

Выберем, как в п. 13 предыдущей главы, два узла P_α, P_β, являющихся концами одного и того же стержня, и рассмотрим материальную систему S, состоящую из остальных $n-2$ узлов P_i и подчиненную исключительно двусторонним связям, которые осуществляются

$$m - 1 = 2(n-2)$$

стержнями фермы, отличными от $P_\alpha P_\beta$. К системе S, определенной таким образом, применим общее правило п. 36 для вычисления реакций, действующих на любой из узлов $P_i (i \gtrless \alpha, \beta)$. Речь идет об определении векторов $\boldsymbol{a}$, соответствующих отдельным уравнениям связей $B = 0$, которые заданы в виде (29). Узел P_i испытывает реакции, происходящие от тех стержней, которые в нем сходятся, т. е. от тех связей вида (29), в которых при заданном значении i значения j соответствуют узлам, соединенным с P_i стержнями.