так что дело сводится к вычислению общей величины двух реакций в точках B и D.

Для этой цели, в согласии с правилом предыдущего пункта, достаточно рассмотреть стержневой ромб $ABCD$, получающийся из данной системы путем отбрасывания стержня BD и последующего присоединения к действующей силе, весу p, двух реакций в точках B и D, и применить общее уравнение статики к тому виртуальному перемещению ромба, которое сближает или удаляет две точки B и D. Такое перемещение определяется соответствующей вариацией угла θ; поэтому, обозначая через l общую длину четырех стержней ромба, будем иметь

$$BD = 2l \sin\theta, \qquad AC = 2l \cos\theta.$$

Общее уравнение статики принимает для этого перемещения вид

$$R\delta(2l\sin\theta) + p\delta(2l\cos\theta) = 0;$$

решая его относительно R, получим

$$R = p \operatorname{tg}\theta.$$

§ 8. Приложение к плоским неизменяемым фермам без лишних стержней

43. Согласно тому, что установлено в § 3 предыдущей главы, плоскую неизменяемую форму без лишних стержней можно рассматривать как систему из n материальных точек P_i с координатами x_i, y_i, которые связаны $m = 2n - 3$ уравнениями вида

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - l_{ij} = 0, \tag{29}$$

где индексы i, j относятся ко всем узлам P_i, P_j, действительно соединенным стержнями.

Выберем, как в п. 13 предыдущей главы, два узла P_α, P_β, являющихся концами одного и того же стержня, и рассмотрим материальную систему S, состоящую из остальных $n-2$ узлов P_i и подчиненную исключительно двусторонним связям, которые осуществляются

$$m - 1 = 2(n-2)$$

стержнями фермы, отличными от $P_\alpha P_\beta$. К системе S, определенной таким образом, применим общее правило п. 36 для вычисления реакций, действующих на любой из узлов $P_i (i \gtrless \alpha, \beta)$. Речь идет об определении векторов $\boldsymbol{a}$, соответствующих отдельным уравнениям связей $B = 0$, которые заданы в виде (29). Узел P_i испытывает реакции, происходящие от тех стержней, которые в нем сходятся, т. е. от тех связей вида (29), в которых при заданном значении i значения j соответствуют узлам, соединенным с P_i стержнями.

Если обозначим для краткости через $f_j = 0$ любое из этих уравнений связей, то проекции соответствующего вектора $\boldsymbol{a}_{ij}$ определятся в виде

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial f_j}{\partial y_i}$$

или, в явной форме,

$$\frac{x_i - x_j}{l_{ij}}, \qquad \frac{y_i - y_j}{l_{ij}},$$

откуда следует

$$\boldsymbol{a}_{ij} = \frac{1}{l_{ij}} \overrightarrow{P_j P_i}.$$

Вектор $\boldsymbol{a}_{ij}$ есть не что иное, как версор (единичный вектор) стержня $P_i P_j$, ориентированный от P_j к P_i, так что если мы предположим, что версор приложен к узлу P_i, то он будет направлен во внешнюю сторону от стержня, к которому он относится.

Так как в ферме нет односторонних связей, то выражение (23) полной реакции, испытываемой узлом P_i, представится в виде

$$\boldsymbol{R}_i = S_j \frac{p_{ij}}{l_{ij}} \overrightarrow{P_j P_i}, \tag{30}$$

где скаляры p_{ij} представляют собой множители Лагранжа, а сумма S_j должна быть распространена только на те узлы P_j, которые соединены стержнями с P_i. Равенство (30) дает для интересующего нас случая разложение реакции, действующей на узел P_i, по различным стержням, которые в нем сходятся; слагаемое $p_{ij}\overrightarrow{P_j P_i}/l_{ij}$ дает реакцию, испытываемую узлом P_i со стороны стержня $P_i P_j$. В этой реакции скаляр p_{ij} представляет собой проекцию этой реакции на ориентированное направление $P_i P_j$ стержня; сам стержень $P_i P_j$ испытывает равное и прямо противоположное усилие со стороны узла P_i; стержень сжат, если $p_{ij} > 0$, и растянут — в противном случае.

Остается определить скаляры p_{ij}, которых в совокупности будет столько же, сколько имеется стержней в системе, за исключением стержня $P_\alpha P_\beta$, т. е. $m - 1 = 2(n-2)$.

Из общих рассуждений п. 32 следует, что так как в рассматриваемом нами случае все связи двусторонние, то множители Лагранжа будут однозначно определены при единственном условии, что уравнения связей независимы между собой, т. е. что функциональная матрица левых частей этих уравнений, рассматриваемых как функции от координат точек системы, имеет ранг, равный числу самих уравнений. В нашем случае число уравнений равно $m - 1 = 2(n-2)$ [поскольку должно быть исключено равенство (29), соответствующее $i = \alpha$, $j = \beta$]; в силу самого определения неизменяемой системы без лишних стержней, их левые части независимы (гл. XIV, п. 14) по отношению к $2(n-2)$ координатам различных узлов P_i $(i \gtrless \alpha, \beta)$.

Таким образом, мы нашли аналитическим путем, что значения усилий в неизменяемой ферме без лишних стержней подчиняются общему принципу виртуальных работ. На практике, конечно, более предпочтителен графический метод (гл. XIV, § 4). Но рассуждения, изложенные выше, имеют бо́льшую общность, так как применяются без исключения ко всевозможным неизменяемым фермам без лишних стержней, между тем как геометрические методы, пригодные даже для более обширных классов ферм, чем простые треугольные фермы, рассмотренные нами в предыдущей главе, все-таки подчинены, в отношении их приложимости, некоторым специальным ограничениям.

44. Равенства (30) дают усилия, относящиеся к любому стержню, путем полного определения всех реакций узлов P_i. Когда нас интересует усилие, испытываемое определенным стержнем, надо обратиться к способу, указанному в пп. 40 и 41, который в настоящем случае состоит: а) в том, чтобы ввести вместо рассматриваемого стержня те два усилия, с которыми он действовал на соответствующие узлы; в) в применении к системе, освобожденной таким образом от одной связи и тем самым превращенной из неизменяемой системы в систему с полными связями, принципа виртуальных работ на перемещении, которое стало для нее возможным вследствие выбрасывания этого стержня.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Стержневая система состоит из четырех однородных стержней, соединенных шарнирами P_2, P_3,P_4, в то время как концы P_1 и P_5 прикреплены к двум неподвижным точкам, расположенным на одном и том же уровне. Два крайних стержня равны друг другу и весят каждый p_1; равны между собой также и промежуточные стержни, общий вес которых есть p_2. При равновесии под действием собственного веса система располагается в вертикальной плоскости, симметрично относительно средней вертикали (содержащей шарнир P_3).

Доказать, применяя, например, принцип Торричелли, что если через α_1, α_2 обозначены углы наклона к горизонтали P_1P_5 первых двух стержней, то в конфигурации равновесия должно иметь место соотношение

$$(p_1+2p_2)\operatorname{tg}\alpha_2=p_2\operatorname{tg}\alpha_1.$$

2. Тело (материальная точка) P веса p опирается на абсолютно гладкую плоскость, наклоненную под углом α к горизонту, и удерживается нитью, проходящей по жолобу блока и несущей на своем конце груз q. Блок находится выше наклонной плоскости и расположен в вертикальной плоскости, пересекающей первую по линии наибольшего наклона, проходящей через P.

Вертикаль, проходящая через блок, пересекает линию наибольшего наклона на расстоянии s от P; отрезок вертикали, заключенный между блоком и этим пересечением, есть h. Показать, что для равновесия требуется, чтобы противовес q заключался между p и касательной составляющей p и чтобы существовало соотношение

$$s^2+2hs\sin\alpha=\frac{(p^2-q^2)\,h^2\sin^2\alpha}{q^2-p^2\sin^2\alpha}.$$