Таким образом, мы нашли аналитическим путем, что значения усилий в неизменяемой ферме без лишних стержней подчиняются общему принципу виртуальных работ. На практике, конечно, более предпочтителен графический метод (гл. XIV, § 4). Но рассуждения, изложенные выше, имеют бóльшую общность, так как применяются без исключения ко всевозможным неизменяемым фермам без лишних стержней, между тем как геометрические методы, пригодные даже для более обширных классов ферм, чем простые треугольные фермы, рассмотренные нами в предыдущей главе, все-таки подчинены, в отношении их приложимости, некоторым специальным ограничениям.

44. Равенства (30) дают усилия, относящиеся к любому стержню, путем полного определения всех реакций узлов P_i. Когда нас интересует усилие, испытываемое определенным стержнем, надо обратиться к способу, указанному в пп. 40 и 41, который в настоящем случае состоит: а) в том, чтобы ввести вместо рассматриваемого стержня те два усилия, с которыми он действовал на соответствующие узлы; в) в применении к системе, освобожденной таким образом от одной связи и тем самым превращенной из неизменяемой системы в систему с полными связями, принципа виртуальных работ на перемещении, которое стало для нее возможным вследствие выбрасывания этого стержня.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Стержневая система состоит из четырех однородных стержней, соединенных шарнирами P_2, P_3,P_4, в то время как концы P_1 и P_5 прикреплены к двум неподвижным точкам, расположенным на одном и том же уровне. Два крайних стержня равны друг другу и весят каждый p_1; равны между собой также и промежуточные стержни, общий вес которых есть p_2. При равновесии под действием собственного веса система располагается в вертикальной плоскости, симметрично относительно средней вертикали (содержащей шарнир P_3).

Доказать, применяя, например, принцип Торричелли, что если через α_1, α_2 обозначены углы наклона к горизонтали P_1P_5 первых двух стержней, то в конфигурации равновесия должно иметь место соотношение

$$(p_1+2p_2)\operatorname{tg}\alpha_2=p_2\operatorname{tg}\alpha_1.$$

2. Тело (материальная точка) P веса p опирается на абсолютно гладкую плоскость, наклоненную под углом α к горизонту, и удерживается нитью, проходящей по желобу блока и несущей на своем конце груз q. Блок находится выше наклонной плоскости и расположен в вертикальной плоскости, пересекающей первую по линии наибольшего наклона, проходящей через P.

Вертикаль, проходящая через блок, пересекает линию наибольшего наклона на расстоянии s от P; отрезок вертикали, заключенный между блоком и этим пересечением, есть h. Показать, что для равновесия требуется, чтобы противовес q заключался между p и касательной составляющей p и чтобы существовало соотношение

$$s^2+2hs\sin\alpha=\frac{(p^2-q^2)\,h^2\sin^2\alpha}{q^2-p^2\sin^2\alpha}.$$

3. Гибкая и нерастяжимая нить ничтожной массы может скользить вдоль параболического профиля с вертикальной осью (вогнутость обращена вниз). Концы нити находятся под действием двух грузов весом q_1 и q_2. Показать, что если y_1 и y_2 обозначают ординаты концов нити и $x^2=2py$ есть уравнение параболы (ось y совпадает с вертикалью, проходящей через вершину), то в положении равновесия будем иметь

$$\frac{q_1^2-q_2^2}{p}=\frac{q_2^2}{2y_1}-\frac{q_1^2}{2y_2}.$$

4. Шесть одинаковых стержней, каждый веса p, сочлененных друг с другом, находятся в вертикальной плоскости. Один из них AB закреплен в горизонтальном положении; другие расположены симметрично относительно вертикали, проходящей через середину стержня AB. Показать, что шестиугольник будет находиться в равновесии, если к середине M стороны, противоположной AB, приложить силу, равную $3p$ и направленную по вертикали вверх.

5. К двум точкам P и Q приложены две равные и прямо противоположные силы $\mathbf{\Phi}$ и $-\mathbf{\Phi}$. Обозначим через φ проекцию силы $\mathbf{\Phi}$ на ось QP и равную ей проекцию силы $-\mathbf{\Phi}$ на ось PQ, или величину обоих усилий, принимаемых за положительные, если речь идет о растягивающих усилиях. Показать, что если δl есть вариация расстояния, соответствующего произвольным элементарным перемещениям δP и δQ обеих точек, то сумма элементарных работ сил $\mathbf{\Phi}$ и $-\mathbf{\Phi}$ будет равна $\varphi\delta l$ (п. 3, *в*).

6. Стержень AB веса p может вращаться вокруг точки A в вертикальной плоскости. Другой стержень BC сочленен с первым в конце B и может вращаться в той же самой вертикальной плоскости вокруг своего конца B. Оба стержня однородны. В C приложена горизонтальная сила величины F. Показать, что если φ и ψ — углы наклона обоих стержней к горизонтальной прямой в плоскости стержней, то при установившемся равновесии будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{p+2q}{2F},\qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{q}{2F}.$$

7. Пусть будут a и b длины сторон параллелограмма, φ — один из внутренних углов, так что квадраты l^2, l'^2 диагоналей выражаются в виде

$$a^2+b^2\pm 2ab\cos\varphi.$$

В предположении, что речь идет о шарнирно-сочлененном параллелограмме, φ можно принять за лагранжеву координату.

Показать прежде всего, что при любом виртуальном перемещении системы имеем

$$l\,\delta l+l'\,\delta l'=0.$$

Предположим далее, что шарнирно-сочлененный параллелограмм находится в равновесии, если к концам диагонали длины l' приложены две прямо противоположные силы величиной F, стремящиеся сблизить их, в то время как две другие противоположные вершины (концы диагонали длины l) соединены гибкой и нерастяжимой нитью. Показать (на основе п. 40 и упражнения 5), что усилие T, растягивающее нить, определяется равенством

$$T=\frac{l}{l'}F.$$

8. Шестиугольник $ABCDEF$, составленный из шести однородных и равных стержней, подвешен в точке A и симметрично расположен относительно вертикали, проходящей через эту точку. Он удерживается в равновесии двумя горизонтальными стержнями BF, CE ничтожного веса. Показать (п. 40 и упражнение 5), что первый стержень испытывает давление, в пять раз большее, чем давление, испытываемое вторым стержнем.

9. Многосвязная стержневая система находится в равновесии без приложения внешних сил. Поэтому имеются только внутренние усилия.

Показать, что если φ означает для какого-нибудь стержня величину (включая и знак) усилия, испытываемого им (упражнение 5), и l — длину стержня, то будем иметь $\sum \varphi l = 0$, где сумма распространяется на все стержни системы.

[Каждый узел системы надо рассматривать как свободную точку, находящуюся под действием усилий, происходящих от стержней, которые сходятся в этом узле, и представлять себе, что определенная таким образом система свободных точек испытывает гомотетичное расширение с произвольным центром.]

10. n однородных стержней длины l и веса p сочленены в точке A и находятся в равновесии, будучи расположены симметрично вокруг вертикали, проходящей через точку A, и опираясь нижними концами на сферическую поверхность с радиусом $r > l$ и с центром O, расположенным вертикально над точкой A. К узлу A подвешен груз веса q. Показать, что если α есть угол, образуемый каждым стержнем с вертикалью, то будем иметь соотношение

$$l^2 (3n^2p^2 + 4npq) \cos^2 \alpha = (r^2 - l^2)(np + 2q)^2.$$