Глава XVI

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ

§ 1. Понятие об относительном равновесии

1. В предыдущих главах мы изучали условия равновесия различного вида материальных систем, относя их к неподвижной системе координат или к системе, рассматриваемой как неподвижная (в том смысле, который в механике приписывается этому названию). Рассмотрим более общий случай системы осей $Oxyz$, находящейся в каком-нибудь заданном движении, и поставим себе задачу найти условия, которым надо подчинить прямо приложенные к материальной системе силы для того, чтобы эта материальная система, несмотря на действие сил, сохраняла неизменным положение относительно осей $Oxyz$. Это и есть то, что мы будем называть *относительным равновесием*, приписывая, если может возникнуть неясность, название абсолютного равновесия тому равновесию, которое мы рассматривали до сих пор (и в котором оси $Oxyz$ предполагаются неподвижными).

2. Начнем, как и при изучении абсолютного равновесия, с простого случая, в котором речь идет об одной материальной точке P. Поскольку она сохраняет свое положение неизменным относительно подвижной системы осей, ее относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ и, следовательно, относительное ускорение $\boldsymbol{a}_r$ должны обращаться в нуль.

Пусть $\boldsymbol{F}$ есть результирующая всех действующих на P сил (включая возможную реакцию, если имеются связи). Речь идет об установлении того, каким условиям должна удовлетворять сила $\boldsymbol{F}$ для того, чтобы точка P оставалась в относительном равновесии.

Здесь достаточно будет кроме основного уравнения динамики

$$m\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{F}$$

(где, для большей ясности, через $\boldsymbol{a}_a$ обозначено абсолютное ускорение) принять во внимание теорему Кориолиса, выражаемую (гл. IV, п. 3) уравнением

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_\tau + 2\boldsymbol{a}_c.$$

Если относительное равновесие существует, то (п. 1) будем иметь $\boldsymbol{a}_r = 0$, а также $\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r = 0$, следовательно, $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_\tau$ и основной закон (абсолютного) движения можно будет написать в виде

$$m\boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{F},$$

или в виде

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_\tau = 0. \tag{1}$$

Это и есть условие, которому необходимо должна удовлетворять сила $\boldsymbol{F}$, когда точка P находится в относительном равновесии.

Но оно также и достаточно, т. е. если уравнение (1) удовлетворяется, то равновесие существует; или, иначе, если предполагается, что в какой-то момент $t = t_0$ точка P находилась в относительном покое ($\boldsymbol{v}_r = 0$ при $t = t_0$), то из равенства (1) следует, что равенство $\boldsymbol{v}_r = 0$ будет иметь место в какой угодно момент времени t.

В самом деле, предположение (1) равносильно равенству $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_\tau$ или, если вместо $\boldsymbol{a}_a$ подставим его выражение, даваемое теоремой Кориолиса, равносильно также равенству

$$\boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{a}_c = 0.$$

Так как вектор $\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$, если он не будет равен нулю, будет перпендикулярен к $\boldsymbol{v}_r$, то предыдущее соотношение, умноженное скалярно на $\boldsymbol{v}_r$, обратится в равенство

$$\boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{a}_r = 0$$

или

$$\boldsymbol{v}_r \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{v}_r) = \frac{1}{2}\frac{dv_r^2}{dt} = 0,$$

откуда мы заключаем, что $\boldsymbol{v}_r = \text{const}$; так как, по предположению, скорость $\boldsymbol{v}_r$ обращается в нуль в момент t_0, то она будет оставаться постоянно равной нулю.

Уравнение (1) *является поэтому необходимым и достаточным условием для того, чтобы точка P находилась в относительном равновесии по отношению* к осям *Oxyz*.

3. Этот результат можно истолковать очень наглядно, если сравнить его с условием абсолютного равновесия, заключающимся в том, что результирующая всех сил, приложенных к точке, должна быть равна нулю. Это значит, что равенство (1) можно рассматривать как условие *абсолютного* равновесия материальной точки, на которую, кроме силы $\boldsymbol{F}$ (действительно приложенной), действует еще добавочная сила $\boldsymbol{\chi} = -m\boldsymbol{a}_\tau$. Эта фиктивная сила, которая, в условиях относительного равновесия, представляет влияние движения осей и приводится к нулю не только тогда, когда эти оси неподвижны, но также и всякий раз, как $\boldsymbol{a}_\tau = 0$, называется ***силой инерции переносного движения.***

Вводя систематически такую силу, мы можем высказать следующее правило.

Все вопросы об относительном равновесии точки исследуются так, как если бы речь шла об абсолютном равновесии, при условии, что к внешним прямо приложенным силам причисляется также сила инерции переносного движения.

Эта сила, по самому определению ее, зависит от движения осей, и в ближайшем параграфе мы исследуем ее поведение в некоторых простых и интересных для приложений случаях.

4. Только что установленное в случае материальной точки правило относительного равновесия распространяется и на материальные системы какой угодно природы и оказывается непосредственно приложимым ко всем тем случаям (свободные и несвободные твердые тела, стержневые системы, нити и т. п.), для которых уже известны условия абсолютного равновесия.

Чтобы показать это, достаточно, если речь идет о связях без трения, воспользоваться принципом виртуальных работ, т. е. (предыдущая глава, п. 2) соотношением

$$\delta\Lambda = \sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta P_i \geqslant 0,$$

и заметить, что в случае относительного равновесия всякая реакция $\boldsymbol{R}_i$ в точности равна — (активная сила + сила инерции переносного движения). Таким образом, мы пришли к той же самой формулировке (предыдущая глава, п. 7) необходимого и достаточного условия, которая была получена для абсолютного равновесия, с тою разницей, что в случае относительного равновесия к активным силам должны быть причислены также и силы инерции переносного движения.

Мы можем при выводе условий равновесия пользоваться также и более элементарными и частными способами (в некотором отношении даже более практичными, потому что заранее не исключаются силы трения), которым мы следовали в гл. IX, XIII и XIV при установлении условий абсолютного равновесия, пригодных для всякой категории рассмотренных там систем. Мы поступали там так:

а) выражали, что каждая точка P системы находится в равновесии под действием прямо приложенных сил (внешних и внутренних) и реакций связей, удовлетворяющих определенным экспериментальным характеристикам;

б) комбинировали следствия из этих элементарных условий равновесия таким образом, чтобы исключить, насколько возможно, вспомогательные элементы, оставив прямо приложенные силы.

Тот же самый способ, очевидно, применим и к выводу условий относительного равновесия. Если можно считать, как это бывает во многих случаях, что внутренние силы и реакции связей также и во время движения сохраняют те же самые свойства, которые были обнаружены у них в состоянии покоя, то элементарные условия для относительного равновесия будут отличаться от аналогичных условий абсолютного равновесия только присоединением к каждой точке соответствующей силы инерции переносного движения.

Таким образом правило предыдущего пункта может быть распространено на какие угодно материальные системы при условии, что внутренние силы и реакции связей сохраняют во время движения те свойства, которые они имеют в состоянии покоя.

Следует заметить, что это не всегда имеет место, как мы увидим в § 3. В таких случаях всегда можно применить указанный выше способ, но при применении его необходимо принимать во внимание влияние, которое оказывает состояние движения на поведение внутренних сил и реакций.

§ 2. Замечательные частные случаи

5. Поступательное движение. Пусть система осей $Oxyz$ находится в каком угодно *поступательном движении*. Ускорение переносного движения a_τ в любой момент времени одно и то же для какой угодно точки P (гл. III, п. 4) и равно ускорению a_0 начала O. То же самое можно сказать и о силе инерции переносного движения $\chi = -ma_0$.

Очень простой пример, иллюстрирующий этот случай, представляет собой равновесие по отношению к свободно падающему телу, в предположении, что оно брошено или просто отпущено из состояния покоя таким образом, что движется далее чисто поступательно.

Обозначив через g ускорение силы тяжести (по величине и направлению), будем иметь $a_0 = g$, так что переносная сила $\chi = -mg$ уравновешивает вес.

Если мы предположим, например, что человек несет на плечах груз и прыгает вниз, то за время падения мускульное усилие, поддерживающее груз, сводится к нулю. То же самое можно сказать и о времени опускания, если прыжок был сделан вверх. Противоположное ощущение при прыжке вверх следует приписать предварительному усилию, необходимому для того, чтобы сделать такой прыжок.

Если, далее, поступательное движение осей $Oxyz$ будет в то же время прямолинейным и равномерным, то ускорение переносного движения, а вместе с ним и сила χ будут равны нулю.

Прямолинейное и равномерное поступательное движение не оказывает никакого влияния на условия равновесия: они остаются одинаковыми с условиями, имеющими место для абсолютного равновесия.