во многих случаях, что внутренние силы и реакции связей также и во время движения сохраняют те же самые свойства, которые были обнаружены у них в состоянии покоя, то элементарные условия для относительного равновесия будут отличаться от аналогичных условий абсолютного равновесия только присоединением к каждой точке соответствующей силы инерции переносного движения.

Таким образом правило предыдущего пункта может быть распространено на какие угодно материальные системы при условии, что внутренние силы и реакции связей сохраняют во время движения те свойства, которые они имеют в состоянии покоя.

Следует заметить, что это не всегда имеет место, как мы увидим в § 3. В таких случаях всегда можно применить указанный выше способ, но при применении его необходимо принимать во внимание влияние, которое оказывает состояние движения на поведение внутренних сил и реакций.

§ 2. Замечательные частные случаи

5. Поступательное движение. Пусть система осей $Oxyz$ находится в каком угодно *поступательном движении*. Ускорение переносного движения a_τ в любой момент времени одно и то же для какой угодно точки P (гл. III, п. 4) и равно ускорению a_0 начала O. То же самое можно сказать и о силе инерции переносного движения $\chi = -ma_0$.

Очень простой пример, иллюстрирующий этот случай, представляет собой равновесие по отношению к свободно падающему телу, в предположении, что оно брошено или просто отпущено из состояния покоя таким образом, что движется далее чисто поступательно.

Обозначив через g ускорение силы тяжести (по величине и направлению), будем иметь $a_0 = g$, так что переносная сила $\chi = -mg$ уравновешивает вес.

Если мы предположим, например, что человек несет на плечах груз и прыгает вниз, то за время падения мускульное усилие, поддерживающее груз, сводится к нулю. То же самое можно сказать и о времени опускания, если прыжок был сделан вверх. Противоположное ощущение при прыжке вверх следует приписать предварительному усилию, необходимому для того, чтобы сделать такой прыжок.

Если, далее, поступательное движение осей $Oxyz$ будет в то же время прямолинейным и равномерным, то ускорение переносного движения, а вместе с ним и сила χ будут равны нулю.

Прямолинейное и равномерное поступательное движение не оказывает никакого влияния на условия равновесия: они остаются одинаковыми с условиями, имеющими место для абсолютного равновесия.

6. Вращения и поступательно-вращательные равномерные движения. Центробежная сила. Пусть система осей находится в равномерном *вращательном движении*. Обозначим через ω угловую скорость и через Q проекцию на ось вращения произвольно взятой точки P (фиг. 75); мы знаем (гл. III, п. 8), что

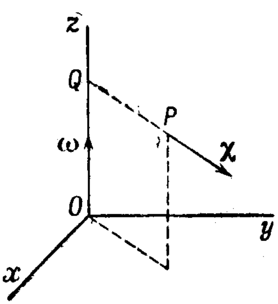
$$a_\tau = \omega^2 \overrightarrow{PQ},$$

следовательно, имеем

$$\chi = m\omega^2 \overrightarrow{QP}. \tag{2}$$

Сила инерции переносного движения в том случае, когда переносное движение есть равномерное вращение, называется *центробежной силой*.

Центробежная сила зависит, как мы видим, от положения точки P относительно оси вращения; она направлена радиально от оси (т. е. по продолжению QP) и величина ее пропорциональна массе точки, расстоянию ее от оси и квадрату угловой скорости.



Фиг. 75.

Если ось вращения мы примем за ось z и через x, y, z обозначим координаты точки P, то проекциями вектора χ, на основании равенства (2), будут

$$\chi_x = m\omega^2 x, \qquad \chi_y = m\omega^2 y, \qquad \chi_z = 0,$$

т. е. они совпадают с производными (по координатам x, y, z точки P) от функции

$$m\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 PQ^2.$$

Следовательно, центробежная сила имеет характер консервативной силы; ее единичный потенциал (т. е. потенциал, отнесенный к единице массы) *равен*

$$\frac{1}{2}\omega^2 PQ^2,$$

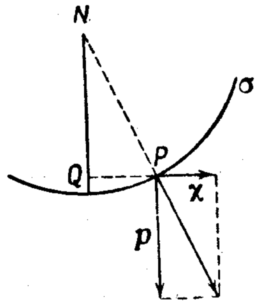
т. е. пропорционален квадрату расстояния от оси вращения и квадрату угловой скорости.

7. Рассмотрим, например, тяжелую точку P, вынужденную оставаться на поверхности σ, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси, и будем искать, при каких условиях точка может оставаться в равновесии на поверхности, предполагаемой лишенной трения.

Согласно общему правилу п. 3, центробежную силу χ мы должны будем рассматривать наряду с весом p, как силу, прямо приложенную к P; таким образом мы придем (гл. X, п. 8) к заключению, что *результирующая* $p+\chi$ *направлена по нормали к поверхности* σ. Если речь идет о точке, не вынужденной обязательно находиться на σ, а подчиненной только односторонней связи, то необходимо добавить качественное ограничение, чтобы сила $p+\chi$ была обращена к области, не совместимой со связью (т. е. внутрь тела, поверхность которого представляет собой опору).

Поэтому положениями равновесия будут только те положения, в которых нормаль к поверхности σ параллельна силе $p+\chi$, с добавлением указанного условия для стороны, если связь не является двусторонней.

Далее, заметим прежде всего, что в точках оси вращения будем иметь $\chi=0$, так что все будет обстоять так, как в случае абсолютного равновесия; если поэтому наша поверхность пересекает ось (по предположению, вертикальную) в некоторой точке, то равновесие в этой точке может существовать только при условии, что соответствующая касательная плоскость горизонтальна.



Фиг. 76.

Во всех остальных случаях центробежная сила $\chi=m\omega^2\overrightarrow{QP}$ будет представлена горизонтальным, не равным нулю вектором.

С другой стороны, обе силы p и χ, а следовательно, и сила $p+\chi$ будут находиться в одной и той же вертикальной плоскости, определяемой осью вращения и положением равновесия точки P, об определении которого идет речь, так что линия действия $p+\chi$, т. е. *нормаль к поверхности* σ (фиг. 76), *в точке* P *должна пересекать ось вращения в некоторой точке* N, необходимо расположенной выше точки P (для того, чтобы χ была направлена радиально во вне).

Условие, чтобы нормаль встречала ось, выполняется само собой, когда речь идет о поверхности вращения (имеющей своей осью ось вращения). Далее, обозначив через θ угол наклона нормали к вертикали, мы должны иметь

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\chi}{p}=\frac{\omega^2 PQ}{g} \tag{3}$$

или, обращаясь к прямоугольному треугольнику PQN,

$$QN=\frac{g}{\omega^2}. \tag{3'}$$

Отсюда следует, что положения относительного равновесия зависят от геометрической формы поверхности и от угловой скорости, но не от массы точки.

В случае поверхности вращения, отрезок QN представляет собой очевидно *субнормаль* меридианной кривой (относящейся к точке P), так что исследование положений равновесия (не расположенных на оси) приводит тогда к отысканию тех точек меридиана, для которых субнормаль принимает заданное значение g/ω^2.

8. В случае сферы субнормаль QN, если R означает радиус, будет равна $R\cos\theta$, так что равенство (3′) принимает вид

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}. \tag{4}$$

Это уравнение относительно θ допускает действительные (т. е. вещественные) решения и однозначно определяет (острый) угол, при условии $g/\omega^2 R < 1$, или, что одно и то же,

$$\omega^2 > \frac{g}{R}.$$

Поэтому необходимо, чтобы угловая скорость, с которой вращается сфера, превосходила известный предел для того, чтобы тяжелая точка могла находиться на ней в относительном равновесии в положениях, отличных от полюсов. Если этот предел превзойден, то геометрическим местом возможных положений равновесия будет горизонтальная параллель нижней полусферы, дополнение широты которой определяется из уравнения (4).

Чем быстрее вращение сферы, т. е. чем более значительной является угловая скорость ω, тем меньше будет $\cos\theta$; поэтому горизонтальная параллель относительного равновесия должна перемещаться от нижнего полюса к экватору и стремиться к экватору асимптотически при безграничном возрастании ω.

9. Рассмотрим, наконец, случай *равномерного поступательно-вращательного движения системы осей Oxyz.*

Припоминая, что в сложном движении, составленном из двух или большего числа движений, ускорение равно сумме ускорений, относящихся к составляющим движениям, мы можем сказать, что прямолинейное и равномерное поступательное движение (наложенное на какое-нибудь другое движение твердого тела) не изменяет его переносного ускорения. *Таким образом, при равномерном поступательно-вращательном движении все происходит так, как и в случае простого равномерного вращения, и, следовательно, мы снова приходим к центробежной силе.*

§ 3. Установившееся вращение горизонтального вала. Смещение точек опоры

10. Рассмотрим (цилиндрический) горизонтальный вал, опирающийся двумя своими концами на подшипники, каждый из которых состоит из цилиндрической впадины немного большего, чем