так что исследование положений равновесия (не расположенных на оси) приводит тогда к отысканию тех точек меридиана, для которых субнормаль принимает заданное значение g/ω^2.

8. В случае сферы субнормаль QN, если R означает радиус, будет равна $R\cos\theta$, так что равенство (3′) принимает вид

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}. \tag{4}$$

Это уравнение относительно θ допускает действительные (т. е. вещественные) решения и однозначно определяет (острый) угол, при условии $g/\omega^2 R < 1$, или, что одно и то же,

$$\omega^2 > \frac{g}{R}.$$

Поэтому необходимо, чтобы угловая скорость, с которой вращается сфера, превосходила известный предел для того, чтобы тяжелая точка могла находиться на ней в относительном равновесии в положениях, отличных от полюсов. Если этот предел превзойден, то геометрическим местом возможных положений равновесия будет горизонтальная параллель нижней полусферы, дополнение широты которой определяется из уравнения (4).

Чем быстрее вращение сферы, т. е. чем более значительной является угловая скорость ω, тем меньше будет $\cos\theta$; поэтому горизонтальная параллель относительного равновесия должна перемещаться от нижнего полюса к экватору и стремиться к экватору асимптотически при безграничном возрастании ω.

9. Рассмотрим, наконец, случай *равномерного поступательно-вращательного движения системы осей $Oxyz$.*

Припоминая, что в сложном движении, составленном из двух или большего числа движений, ускорение равно сумме ускорений, относящихся к составляющим движениям, мы можем сказать, что прямолинейное и равномерное поступательное движение (наложенное на какое-нибудь другое движение твердого тела) не изменяет его переносного ускорения. *Таким образом, при равномерном поступательно-вращательном движении все происходит так, как и в случае простого равномерного вращения, и, следовательно, мы снова приходим к центробежной силе.*

§ 3. Установившееся вращение горизонтального вала. Смещение точек опоры

10. Рассмотрим (цилиндрический) горизонтальный вал, опирающийся двумя своими концами на подшипники, каждый из которых состоит из цилиндрической впадины немного большего, чем у вала, диаметра, и предположим, что вал вращается равномерно вокруг собственной оси.

Мы покажем сейчас, что в условиях действия сил, которые часто наблюдаются на практике (и которые немного позже будут точно определены), вал при наличии трения опирается на подшипники не в самых нижних точках этих подшипников, как это могло бы казаться с первого взгляда и как это очевидно происходит при равновесии.

Разберем сначала фиктивный случай, рассматривая явление в вертикальном плоском сечении. В этом случае мы будем иметь твердый круг (круглый диск) с радиусом r, равномерно вращающийся вокруг собственного центра O, опираясь точкой P (см. фиг. 77 на стр. 294) на неподвижную окружность (след подшипника). Предположим, что внешние, действительно приложенные силы (все расположенные в названной плоскости) приводятся к следующим двум парам и двум силам:

1) *движущая* пара, т. е. пара с моментом $\mathbf{Г}_1$, параллельным оси вращения (и перпендикулярным к плоскости круга), сторона вращения которого совпадает со стороной вращения вала;

2) пара *сопротивления*, т. е. пара с момента $\mathbf{Г}_2$, всегда параллельным оси вращения и направленным в противоположную сторону;

3) весь $\boldsymbol{p}$ (направленный по вертикали вниз);

4) реакция $\boldsymbol{R}$ точки опоры P вала на подшипник.

Предположим еще, что вал, а следовательно, и диск, который мы рассматриваем вместо вала, однородны. Центр тяжести совпадает тогда с центром O диска.

Выясним теперь, каким образом вал может находиться в (равномерном) установившемся вращении вокруг собственной оси. Очевидно, достаточно будет выразить, что по отношению к системе осей, неизменно связанных с валом и, следовательно, равномерно вращающихся вместе с ним, имеет место относительное равновесие самого вала под действием только что перечисленных сил.

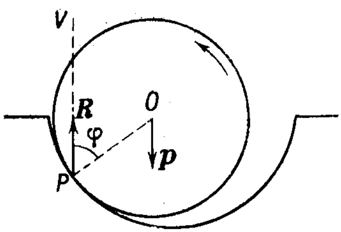
Так как речь идет о твердом теле, то необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись основные уравнения; при этом подразумевается, что, согласно ранее изложенному правилу, необходимо принять во внимание также и центробежные силы отдельных точек тела. В настоящем случае при заданной однородности вала центробежной силе, возникающей в любом элементе A, соответствует равная и прямо противоположная центробежная сила, относящаяся к элементу A', симметричному A относительно O.

Отсюда следует, что совокупность центробежных сил ничего не вносит в основные уравнения, и поэтому от них можно отвлечься.

Выразим теперь, что результирующая внешних сил обращается в нуль. Так как результирующая каждой из пар (движущей пары и пары сопротивления) равна нулю, то должна быть равна нулю также и геометрическая сумма веса и реакции $\boldsymbol{R}$, что означает, что вес и реакция должны составлять третью пару (или, в частности, должны быть равны и прямо противоположны).

Для того чтобы пойти далее, необходимо принять во внимание то обстоятельство, что реакция $\boldsymbol{R}$ является как раз одной из тех сил, на поведение которых влияет состояние движения, так что на $\boldsymbol{R}$, в условиях движения, нельзя распространять правила, полученные из опытов над статическим трением (гл. IX). Опираясь на экспериментальный результат, который лучше и более строго будет объяснен в динамике, мы ограничимся здесь утверждением, что во время движения реакция в каждый момент действует по образующей внешней полости конуса трения (динамического) с вершиной в точке опоры, имеющего осью нормаль, а именно по той образующей, проекция которой на касательную к траектории направлена в сторону, противоположную стороне движения точки диска, совпадающей в рассматриваемый момент с точкой опоры.

Если мы исключим идеальный случай, когда трение равно нулю, то отсюда будет следовать, что точка опоры не должна совпадать с самой нижней точкой подшипника. Действительно, так как в этом случае вертикаль совпадает с нормалью к поверхности подшипника, она не может быть образующей конуса трения, и потому невозможно, чтобы результирующая веса и реакции была равна нулю.



Фиг. 77.

Следовательно, мы должны предположить, что точка соприкосновения P несколько смещена из самого нижнего положения. Легко видеть, что величина смещения измеряется *углом динамического трения* φ. Действительно, вертикаль PV (фиг. 77), проведенная через P, должна быть образующей конуса трения, что означает, что угол $\widehat{OPV}$ равен углу φ. Так как, далее, сила трения препятствует движению точки P, *то точка соприкосновения должна сместиться на угол* φ *в сторону, противоположную вращению.*

Выразим теперь, что результирующий момент относительно точки O всех внешних сил, действующих на вал, равен нулю. Это векторное соотношение сводится к алгебраическому, так как линией действия всех моментов является ось вала, так что достаточно, чтобы обращался в нуль результирующий момент относительно этой оси. Обозначим через Γ_1, Γ_2 величины моментов движущей пары и пары сопротивления; момент пары вес — реакция (ввиду того, что линия действия веса проходит через точку O, а линия действия реакции есть вертикаль, проходящая через точку P) по абсолютной величине равен

$$\gamma = rp \sin\varphi = rp \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = rp \frac{f}{\sqrt{1+f^2}};$$

его можно считать равным величине rpf (f — коэффициент динамического трения), если угол φ достаточно мал.

С другой стороны, он направлен в ту же сторону, что и момент Γ_2, потому что касательная составляющая реакции оказывает сопротивление движению, а нормальная реакция имеет момент, равный нулю, так как направлена в точку O. Поэтому абсолютная величина Γ_1 момента движущей пары должна быть равна сумме абсолютных величин моментов двух других пар, т. е.

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + \gamma, \tag{5}$$

где можно считать $\gamma = rpf$.

Равенство (5) *в сочетании с геометрическим фактом, что смещение точки опоры измеряется углом трения φ, составляет искомое условие относительного равновесия.*

11. В реальном случае, в котором опорой являются два подшипника, мы можем представить себе вес $\boldsymbol{p}$ вала разложенным на две равные и вертикальные силы $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, приложенные к концам вала.

Если мы предположим, что другие внешние силы попрежнему приводятся к двум парам (движущей и сопротивления) с моментами $\boldsymbol{\Gamma}_1$ и $\boldsymbol{\Gamma}_2$, имеющими линией действия ось вала, то для относительного равновесия, очевидно, будет достаточно:

1) чтобы сила $\boldsymbol{p}_1$ и реакция $\boldsymbol{R}_1$ опоры P_1 составляли пару;

2) аналогично, чтобы составляли пару сила $\boldsymbol{p}_2$ и реакция $\boldsymbol{R}_2$ опоры P_2;

3) чтобы обращался в нуль результирующий момент четырех пар (движущей; сопротивления; $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{R}_1$; $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{R}_2$) относительно оси вращения.

Если допустить, что угол трения φ один и тот же для обоих подшипников, то первые два условия будут удовлетворены при равенстве углов смещения обеих опор P_1 и P_2.

Третье условие, если через γ_1 и γ_2 обозначим моменты (относительно оси вращения) двух пар $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{R}_2$, выразится арифметическим равенством

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2.$$

Как и в предыдущем пункте, мы будем иметь приближенно

$$\gamma_1 = rfp_1, \qquad \gamma_2 = rfp_2,$$

где r есть радиус вала. Отсюда следует, что

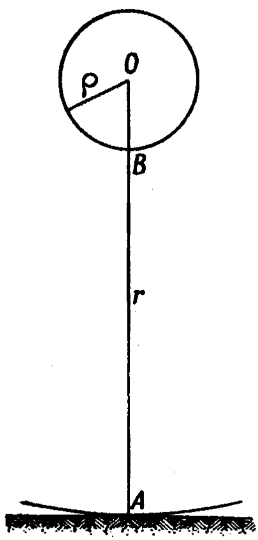
$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + rfp,$$

где p — полный вес вала.

Таким образом, также и для случая, который мы обычно имеем, мы снова находим то же самое условие, что и в предыдущем пункте.

§ 4. Сопротивление качению [1])

12. Пусть $r = OA$ — радиус колеса повозки (фиг. 78), $\rho = OB$ — радиус отверстия ступицы; при этом предполагается, что в отверстие ступицы вставлена и опирается на нее цилиндрическая ось (общая для обоих спаренных колес), неизменно связанная с кузовом повозки (в отличие от железнодорожного вагона, у которого колеса неизменно связаны с осью).



Фиг. 78.

Пусть φ есть угол *динамического* трения между осью и ступицей (отверстие ступицы, по обыкновению, хорошо смазано).

Предполагается, что повозка находится в прямолинейном и равномерном поступательном движении и что на колесо действует определенная часть p веса повозки, передаваемая на ступицу опирающейся на нее осью.

Колесо можно рассматривать как твердое тело, находящееся в равномерном поступательно-вращательном движении, так что различные приложенные к нему силы, включая в число их и центробежные силы, должны находиться в относительном равновесии. Если собственный вес колеса мал по сравнению с p, то им можно будет пренебречь; не придется рассматривать и центробежные силы отдельных материальных элементов колеса, так как (в случае симметрии колеса) они (п. 10) будут попарно равны и прямо противоположны.

В заключение заметим, что силы, действующие на колесо со стороны дороги и со стороны оси повозки, уравновешиваются (по крайней мере, приближенно). Каждая из этих систем сил содержит силу и пару (трения качения). Но трением качения между ступицей и осью по сравнению с трением скольжения мы можем пренебречь, так что силами, которые нужно принять во внимание, будут:

---

[1]) Ср., в частности, Levi-Civita, Sforzo di regime e sforzo di trazione per veicoli trainati, Atti del R. Ist. Veneto, т. LXXIII, 1914, стр. 931—946.