

где r есть радиус вала. Отсюда следует, что

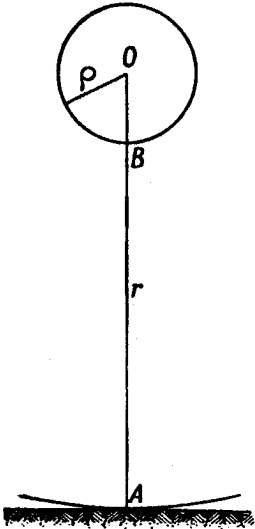
$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + rfp,$$

где p — полный вес вала.

Таким образом, также и для случая, который мы обычно имеем, мы снова находим то же самое условие, что и в предыдущем пункте.

§ 4. Сопротивление качению¹⁾

12. Пусть $r = OA$ — радиус колеса повозки (фиг. 78), $\rho = OB$ — радиус отверстия ступицы; при этом предполагается, что в отверстие ступицы вставлена и опирается на нее цилиндрическая ось (общая для обоих спаренных колес), неизменно связанная с кузовом повозки (в отличие от железнодорожного вагона, у которого колеса неизменно связаны с осью).



Фиг. 78.

Пусть φ есть угол динамического трения между осью и ступицей (отверстие ступицы, по обыкновению, хорошо смазано).

Предполагается, что повозка находится в прямолинейном и равномерном поступательном движении и что на колесо действует определенная часть p веса повозки, передаваемая на ступицу опирающейся на нее осью.

Колесо можно рассматривать как твердое тело, находящееся в равномерном поступательно-вращательном движении, так что различные приложенные к нему силы, включая в число их и центробежные силы, должны находиться в относительном равновесии. Если собственный вес колеса мал по сравнению с p , то им можно будет пренебречь; не придется рассматривать и центробежные силы отдельных материальных элементов колеса, так как (в случае симметрии колеса) они (п. 10) будут попарно равны и прямо противоположны.

В заключение заметим, что силы, действующие на колесо со стороны дороги и со стороны оси повозки, уравниваются (по крайней мере, приближенно). Каждая из этих систем сил содержит силу и пару (трения качения). Но трением качения между ступицей и осью по сравнению с трением скольжения мы можем пренебречь, так что силами, которые нужно принять во внимание, будут:

¹⁾ Ср. в частности, Levi-Civita, Sforzo di regime e sforzo di trazione per veicoli trainati, Atti del R. Ist. Veneto, т. LXXIII, 1914, стр. 931—946.

а) реакция R_1 дороги, приложенная в точке соприкосновения A , не необходимо вертикальная, но расположенная как-нибудь в плоскости колеса;

б) пара трения качения между колесом и дорогой, характеризуемая своим моментом, перпендикулярным к плоскости колеса; эта пара (гл. XIII, § 6) действует в сторону, противоположную направлению вращения колеса, и момент ее по величине равен hr , где h — соответствующий параметр.

в) усилие R_2 , передаваемое осью ступице колеса и действующее в плоскости колеса.

Вертикальная составляющая силы R_2 , по предположению, приводится к весу p . Горизонтальная составляющая, которую мы обозначим через τ , представляет собой *силу тяги*, под действием которой колесо катится, преодолевая пассивные сопротивления. Для того чтобы показать это, достаточно представить себе, что, в силу принципа равенства действия и противодействия, — R_2 есть сила, действию которой подвергается ось (неизменно связанная с повозкой). Все сопротивление движению повозки обуславливается давлением осей на колеса. Поэтому горизонтальная составляющая силы — R_2 является частью сопротивления, относящегося к рассматриваемому колесу (на которое действует вес p). Эта составляющая направлена в сторону, противоположную направлению движения, и ее величина, равная τ , измеряет *силу тяги*.

Необходимо заметить, что так как R_2 имеет горизонтальную составляющую, направленную в сторону движения, то ее *линия действия необходимо будет отклонена от вертикали также в сторону движения*.

Какова точка приложения силы R_2 ? Вообще говоря, ею не будет точка B (самая нижняя точка отверстия ступицы), как это было бы, если бы колесо не вращалось (см. фиг. 78). Благодаря вращению колеса между осью и ступицей развивается *динамическое* трение, а это означает (см. п. 10), что реакция действует по образующей конуса трения. Ось, следовательно, должна опираться на ступицу колеса в такой точке C , чтобы сила R_2 образовывала угол φ с OC . Так как сила трения, действующая на ступицу колеса в точке C , направлена в сторону, противоположную скорости точки P ступицы в движении относительно оси, то сила R_2 , составляющая с OC угол, равный углу трения, должна быть отклонена от OC в сторону движения.

Легко понять, что точка C *должна лежать ниже точки O*: иначе реакция R_2 (которая по предположению имеет направленную вниз вертикальную составляющую, равную весу p), не могла бы оказывать давление на ступицу колеса.

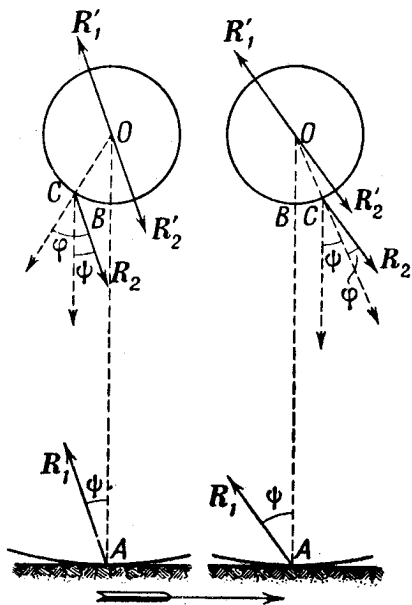
13. После этих замечаний мы в состоянии выразить, что только что определенная (плоская) система сил а), б), в) находится

в равновесии. Отсюда будут определены в функции конструктивных данных (r, ρ, φ, p) и условий качения по дороге (представленных параметром h) сила тяги τ и положение точки опоры C .

Как мы увидим (п. 17), в зависимости от случая это положение C будет смещено (от B) в ту или другую сторону. На *нормальной дороге*, характеризуемой неравенством

$$h < (r - \rho) \operatorname{tg} \varphi,$$

точка C оказывается смещенной назад, т. е. в сторону, противоположную движению (фиг. 79). Но на очень плохих дорогах, где трение качения так велико, что $h > (r - \rho) \operatorname{tg} \varphi$, наоборот, происходит смещение точки опоры в сторону движения.



Фиг. 79.

14. Примем сначала во внимание то, что результирующая должна обращаться в нуль. Так как действующими силами являются R_1, R_2 , то эти силы должны составлять пару. Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы момент этой пары (движущей) равнялся моменту пары (сопротивления) трения качения $h\rho$.

Для того, чтобы определить момент пары (R_1, R_2), нужно ввести угол наклона ψ векторов R_1, R_2 к вертикали, или, точнее, угол, на который надо повернуть вокруг точки C в сторону движения повозки вертикаль, направленную вниз, чтобы

прийти к направлению R_2 . Угол ψ будет заключен между O и $\pi/2$, так как проекции векторов R_2, p на вертикаль, направленную вниз, положительны, а сила τ горизонтальна и направлена в сторону движения (п. 12, в). Поэтому имеем

$$\tau = p \operatorname{tg} \psi, \quad (6)$$

$$R_2 = \frac{p}{\cos \psi}. \quad (7)$$

15. Момент пары (R_1, R_2) вычисляется очень просто, если мы заменим эту пару двумя парами, приложив в точке O два равных и противоположных вектора: вектор R'_1 , эквивалент-

ный R_1 , и R'_2 , эквивалентный R_2 . Момент пары (R_1, R_2) можно представить тогда в виде разности двух моментов: момента пары (R_1, R'_2) , которая всегда (см. фиг. 79) представляет собой движущую пару, и момента пары (R_2, R'_1) , являющейся, наоборот, всегда парой сопротивления. Общая длина каждого из векторов этих пар, согласно равенству (7), есть $p/\cos \psi$.

Так как точки приложения A и O обоих векторов первой пары находятся на расстоянии r друг от друга, и векторы наклонены под углом ψ к вертикали OA , то очевидно плечо пары равно $OA \sin \psi = r \sin \psi$ и, следовательно, соответствующий момент равен $pr \operatorname{tg} \psi$.

Для пары сопротивления (R_2, R'_1) аналогично имеем: расстояние между точками приложения есть $\rho = OC$, плечо равно $\rho \sin \varphi$, так как (п. 12, в) реакция R_2 наклонена к оси OC под углом φ , и потому момент равен

$$-\frac{p}{\cos \psi} \rho \sin \varphi.$$

Момент пары (R_1, R_2) равен поэтому

$$p \left\{ r \operatorname{tg} \psi - \rho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} \right\}.$$

Приравнивая его hp , будем иметь

$$r \operatorname{tg} \psi - \rho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} = h; \quad (8)$$

таким образом все свелось к исследованию этого уравнения, которое содержит только одну неизвестную ψ (угол наклона реакции к вертикали) и служит для определения ее. Сила тяги тотчас же получается на основании равенства (6).

16. Уравнение (8) при помощи очевидного преобразования можно свести к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \psi$. Но сначала мы остановимся на качественном изучении этого уравнения. Предполагая, что r (значительно) больше ρ , как это обычно бывает в действительности мы увидим, прежде всего, что уравнение (8) допускает один и только один корень ψ , заключенный [как это и должно быть на самом деле (п. 14)] в промежутке $0, \pi/2$. Кроме того, из уравнения (8) можно вывести некоторые практически важные свойства этого корня (п. 19), на основании которых можно будет выбрать знак в выражении для корня квадратного уравнения относительно $\operatorname{tg} \psi$.

Левая часть уравнения (8) есть некоторая функция

$$\Psi(\psi) = r \operatorname{tg} \psi - \rho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}$$

от аргумента ψ , конечная и непрерывная при ψ , заключенном между 0 и $\pi/2$ (за исключением верхней границы). Ее производная

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \{r - \rho \sin \varphi \sin \psi\}$$

всегда положительна, так как мы предположили $r > \rho$. Поэтому $\Psi(\psi)$ есть возрастающая функция.

При $\psi = 0$ она приводится к $-\rho \sin \varphi$ и, следовательно, отрицательна. При ψ , достаточно близком к $\pi/2$, она, наоборот, положительна и сколь угодно велика; это делается очевидным, если запишем $\Psi(\psi)$ в виде

$$\frac{r \sin \psi - \rho \sin \varphi}{\cos \psi}$$

и заметим, что при стремлении ψ к $\pi/2$ числитель стремится к положительному пределу

$$r - \rho \sin \varphi,$$

в то время как знаменатель стремится к нулю.

Так как при изменении ψ от нуля до $\pi/2$ функция возрастает от некоторого отрицательного значения до $+\infty$, то она пройдет один и только один раз через всякое положительное значение и, в частности, через значение h , входящее в правую часть уравнения (8).

Уравнение (8) имеет поэтому один и только один корень между 0 и $\pi/2$.

17. Следует заметить, что этот корень будет меньше или больше угла φ , в зависимости от того, превосходит или не превосходит

$$\Psi(\varphi) = (r - \rho) \operatorname{tg} \varphi$$

величину h . Действительно, так как $\Psi(\psi)$ есть возрастающая функция от ψ , то чтобы сделать $\Psi(\psi)$ равной h , мы должны в первом случае [$\Psi(\varphi) > h$] приписать аргументу ψ значение, меньшее φ , а во втором случае [$\Psi(\varphi) < h$] — значение, большее φ .

То обстоятельство, что корень ψ уравнения (8) оказывается в зависимости от случая $<$ или $>$ угла φ , равносильно тому геометрическому факту (уже отмеченному в п. 13), что точка касания S оси с внутренней поверхностью ступицы оказывается смещенной назад или вперед (относительно направления движения).

Чтобы убедиться в этом, достаточно припомнить (п. 14 и 12), что φ и ψ представляют собой углы наклона R_2 к нисходящей вертикали и к OC в сторону движения. Отсюда следует, что разность $\psi - \varphi$ измеряет угол наклона OC к нисходящей вертикали и будет положительной, если радиус OC отклонен от вертикали, т. е. от OB , в сторону движения, и отрицательной — в противном случае.

Вот почему характер смещения (вперед или назад от точки B) точки C зависит от знака разности $\psi - \varphi$ и находит свое выражение в неравенстве

$$(r - \rho) \operatorname{tg} \varphi \leq h.$$

18. Для численных данных, представляющихся на практике, возможно как то, так и другое неравенство.

Действительно, можно считать: $50 \text{ см} \leq r \leq 1 \text{ м}$; $\rho \leq 5 \text{ см}$; $0,07 \leq \operatorname{tg} \varphi \leq 0,15$ (предполагается, что внутренняя поверхность ступицы и ось хорошо смазаны); наконец (гл. XIII, п. 27) h заключено между 10 мм и 75 мм , в зависимости от состояния дороги; заметим, что значения h , превосходящие 50 мм , относятся к дорогам сильно испорченным, незамощенным, грязным или покрытым гравием.

Наименьшее значение величины $(r - \rho) \operatorname{tg} \varphi$ при этих числовых данных будет

$$(50 - 5) \times 0,07 = 3,15 \text{ см}$$

или $31,5 \text{ мм}$, т. е. больше, чем параметр h трения качения для дороги в хорошем состоянии. Для некоторых дорог, например покрытых гравием, h превосходит $(r - \rho) \operatorname{tg} \varphi$; h достигает в таких случаях значения 70 мм и, даже при коэффициенте трения $\operatorname{tg} \varphi = 0,1$ и при значительном радиусе колес ($r = 70 \text{ см}$), имеем $(r - \rho) \operatorname{tg} \varphi < 70 \text{ мм}$.

19. Разделим обе части равенства (8) на r и положим для краткости

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho \sin \varphi}{r} &= \varepsilon, \\ \frac{h}{r} &= k, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

так что ε и k будут отвлеченными числами, меньшими единицы. Уравнение, определяющее ψ , принимает тогда вид

$$f(\psi, \varepsilon, k) = \operatorname{tg} \psi - \frac{\varepsilon}{\cos \psi} - k = 0. \quad (8')$$

Будем рассматривать в этом уравнении ψ как функцию от двух параметров ε и k . Применяя правило дифференцирования неявных функций, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \psi}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial k} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{\frac{\partial f}{\partial \psi}}.$$

Так как числители $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\cos \psi}$, $\frac{\partial f}{\partial k} = -1$ отрицательны для всевозможных значений угла ψ (заключенных между 0 и $\pi/2$), в то время как знаменатель

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{1 - \sin \psi}{\cos^2 \psi}$$

(ср. п. 16) положителен, то будем иметь неравенства

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} > \varepsilon, \quad \frac{\partial \psi}{\partial k} > 0.$$

Таким образом мы доказали, что угол ψ , определенный равенством (8), а вместе с ним и $\operatorname{tg} \psi$, является *возрастающей функцией* как от $\varepsilon = r \sin \psi / r$, так и от $k = h/r$.

Если мы вспомним, что сила тяги τ выражается через $p \operatorname{tg} \psi$, то сразу увидим, как будет изменяться величина силы тяги при изменении конструктивных данных (и параметра h). Таким образом мы приходим к следующему результату: *сила тяги будет тем меньше, чем меньше будут параметр h (входящий множителем в k) и радиус ступицы r (входящий множителем в ε), чем лучше смазка, т. е. чем меньше угол φ (так как ε пропорционально $\sin \varphi$), и, наконец, (так как ε и k обратно пропорциональны r), чем более радиус колеса r .*

Можно было ожидать заранее, что сила тяги возрастает с возрастанием h и φ . Не столь очевидны два другие заключения, особенно последнее; убедиться в его справедливости можно только путем точного исследования. Полученные нами результаты подтверждают известное из практики *преимущество больших колес*. Телеги для перевозки тяжелых грузов, которыми все еще пользуются на наших дорогах, имеют как раз два больших колеса.

20. Переходим наконец к количественному определению $\operatorname{tg} \psi$. Из уравнения (8') имеем

$$\operatorname{tg} \psi - k = \frac{\varepsilon}{\cos \psi},$$

откуда, возводя в квадрат и принимая во внимание тождество $1/\cos^2 \psi = 1 + \operatorname{tg}^2 \psi$, получаем

$$(1 - \varepsilon^2) \operatorname{tg}^2 \psi - 2k \operatorname{tg} \psi + (k^2 - \varepsilon^2) = 0;$$

разрешив это уравнение относительно $\operatorname{tg} \psi$, получим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - (1 - \varepsilon^2)(k^2 - \varepsilon^2)}}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k \pm \varepsilon \sqrt{1 + k^2 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2}.$$

Из двух корней уравнения, полученного путем возведения в квадрат обеих частей уравнения (8'), тот, который принадлежит также и самому уравнению (8'), и, следовательно, первоначальному

уравнению (8), должен, как мы видели, возрастать вместе с ε . Поэтому следует взять корень со знаком $+$, и мы окончательно будем иметь

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k + \varepsilon \sqrt{1 + k^2 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2}, \quad (10)$$

где ε и k определяются равенствами (9).

21. Мы уже отмечали, что величины ε и k на практике получают весьма малыми (несколько сотых, при численных данных, приведенных в п. 18). Поэтому с достаточным приближением можно пренебрегать их квадратами. Равенство (10) при этом принимает вид

$$\operatorname{tg} \psi = k + \varepsilon \quad (10')$$

и сила тяги оказывается равной

$$\tau = p \operatorname{tg} \psi = p(k + \varepsilon), \quad (10'')$$

т. е. представляется в виде суммы двух членов: pk и $p\varepsilon$; первый член тот же самый, который мы имели бы, если бы сопротивление представляло собой только трение качения (качение по дороге), второй член выражает исключительно трение (скольжения) в ступице.

22. Обычно допускают, что оба эффекта складываются¹⁾, и устанавливают равенство (10''), находя отдельно:

1. $pk = rh/r$, на основе закона трения качения (гл. XI, § 6) и допуская, что сила тяги приложена приближенно на высоте оси;

2. $p\varepsilon = pr \sin \varphi/r$; это выражение получается на основании следующих рассуждений.

Предположим, что колесо подвергается действию только сил R_1 , R_2 [определенных в п. 12, а) и в)]; при этом предполагается, что трение качения отсутствует. Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны и прямо противоположны, имея общей линией действия прямую, соединяющую соответствующие точки приложения A и C . Остановимся в частности на силе R_2 . Так как сила R_2 (п. 12) должна иметь составляющую, направленную в сторону движения, и CA есть линия действия этой силы, то необходимо, чтобы, при допущенном предположении, точка C была позади точки A (относительно направления движения). Следовательно, мы имеем первый из указанных в п. 13 случаев, что вполне естественно, так как трение качения равно нулю.

¹⁾ Ср., например, E. Cavalli, Elementi di meccanica applicata alle macchine (Неаполь, 1908, стр. 20—23, 91—93).

Если затем мы вспомним, что через ψ обозначен угол, составляемый силой R_2 с нисходящей вертикалью, откуда следует соотношение

$$\tau = p \operatorname{tg} \psi,$$

то увидим [см. фиг. 79], что такое же значение имеет угол с вершиной в точке A прямой AC (линия действия реакции R_1) с восходящей вертикалью AO .

С другой стороны (в силу того, что сила R_2 лежит на образующей конуса трения с вершиной в точке C) внешний угол треугольника OAC с вершиной в точке C есть φ . Поэтому, выражая, что отношение сторон $OC = \rho$, $OA = r$ треугольника OAC равно отношению синусов противолежащих им углов, будем иметь

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{\rho}{r}.$$

Отсюда следует, что ψ всегда (значительно) меньше φ . Предполагая угол φ (при обилии смазки) столь малым, что значением φ^2 можно пренебречь и приравнявая $\cos \varphi$ единице, мы найдем, что то же самое будет иметь место в еще большей степени и для ψ , и поэтому в предыдущее соотношение можно будет подставить $\sin \psi / \cos \psi = \operatorname{tg} \psi$ вместо $\sin \psi$, откуда

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho \sin \varphi}{r}.$$

Отсюда и получается для силы тяги $p \operatorname{tg} \psi$ выражение

$$\frac{p \rho \sin \varphi}{r},$$

принятое в практике.

23. Сила тяги при начале движения. Сравнение с силой тяги при установившемся движении. Если вместо установившегося движения колеса мы будем рассматривать начальную фазу движения, то тотчас же увидим, что наименьшая сила тяги τ_0 , необходимая для того, чтобы привести колесо в движение, вообще говоря, будет значительно больше. Определим τ_0 , принимая для простоты статическое трение между осью и ступицей колеса одинаковым с динамическим трением.

Так как мы рассматриваем движение, начинающееся из состояния покоя, то точка опоры будет в B . С другой стороны, для того чтобы могло начаться скольжение ступицы по оси, необходимо, чтобы сила R_2 имела касательную составляющую, по крайней мере равную $p \operatorname{tg} \varphi$. Отсюда следует, что $\tau_0 \geq p \operatorname{tg} \varphi$. Момент этой касательной составляющей относительно точки A будет равен

$$\tau_0 (r - \rho) \geq p \operatorname{tg} \varphi (r - \rho).$$

Если, как это чаще всего бывает (ср. п. 18), $(r - \rho) \operatorname{tg} \varphi$ превосходит h , то достаточно будет иметь силу тяги, едва превосходящую $p \operatorname{tg} \varphi$, чтобы заставить колесо катиться.

В другом возможном случае такая сила тяги (заставляя R_2 выйти из конуса трения с вершиною в B) делает равновесие невозможным, но движение оси ограничивается при этом только незначительным скольжением внутри ступицы колеса, благодаря которому точка опоры смещается (вперед), например, из B в C (см. вторую из фигур, помещенных в п. 13), однако качение еще не начинается. Для того чтобы колесо действительно начало катиться, необходимо, чтобы момент силы тяги превосходил момент трения качения hp . Легко видеть, что предельная сила тяги необходимо должна совпадать с силой тяги установившегося движения (превосходящей в этом случае $p \operatorname{tg} \varphi$); в самом деле, речь идет о том, чтобы выразить, что абсолютное равновесие находится в предельном состоянии, когда опора находится в точке C , R_2 лежит на соответствующем конусе трения, и т. д.; поэтому сохраняют свою силу рассуждения предыдущих пунктов, причем здесь нет различия между относительным и абсолютным, так как (п. 12) центробежная сила не вносит изменений и (предыдущий пункт) численное значение коэффициента трения между осью и ступицей колеса рассматривается одинаковым в обоих случаях.

Окончательно мы приходим к следующему заключению: *предельная сила тяги в начале движения равна по крайней мере $p \operatorname{tg} \varphi$ и для дорог в хорошем состоянии значительно превосходит силу тяги при установившемся движении. Для плохих дорог наименьшая сила тяги, необходимая для приведения колеса в движение, приближенно совпадает с силой тяги при установившемся движении.*

§ 5. Нить на вращающемся блоке

24. Для гибкой и нерастяжимой нити (векторное) неопределенное уравнение относительного равновесия можно вывести непосредственно из соотношения

$$dT + F ds = 0,$$

рассмотренного в § 7, гл. XIV, где сохранены прежние обозначения, присоединяя к силе $F ds$, действующей на любой элемент нити, силу инерции переносного движения χ . Выставляя на вид ds и выражая χ в виде $\chi^* ds$ (где через χ^* обозначена сила инерции переносного движения на единицу длины нити), будем иметь

$$\frac{dT}{ds} + F + \chi^* = 0. \quad (11)$$