Если, как это чаще всего бывает (ср. п. 18), $(r-\rho)\operatorname{tg}\varphi$ превосходит h, то достаточно будет иметь силу тяги, едва превосходящую $p\operatorname{tg}\varphi$, чтобы заставить колесо катиться.

В другом возможном случае такая сила тяги (заставляя $\boldsymbol{R}_2$ выйти из конуса трения с вершиною в B) делает равновесие невозможным, но движение оси ограничивается при этом только незначительным скольжением внутри ступицы колеса, благодаря которому точка опоры смещается (вперед), например, из B в C (см. вторую из фигур, помещенных в п. 13), однако качение еще не начинается. Для того чтобы колесо действительно начало катиться, необходимо, чтобы момент силы тяги превосходил момент трения качения hp. Легко видеть, что предельная сила тяги необходимо должна совпадать с силой тяги установившегося движения (превосходящей в этом случае $p\operatorname{tg}\varphi$); в самом деле, речь идет о том, чтобы выразить, что абсолютное равновесие находится в предельном состоянии, когда опора находится в точке C, $\boldsymbol{R}_2$ лежит на соответствующем конусе трения, и т. д.; поэтому сохраняют свою силу рассуждения предыдущих пунктов, причем здесь нет различия между относительным и абсолютным, так как (п. 12) центробежная сила не вносит изменений и (предыдущий пункт) численное значение коэффициента трения между осью и ступицей колеса рассматривается одинаковым в обоих случаях.

Окончательно мы приходим к следующему заключению: *предельная сила тяги в начале движения равна по крайней мере* $p\operatorname{tg}\varphi$ *и для дорог в хорошем состоянии значительно превосходит силу тяги при установившемся движении. Для плохих дорог наименьшая сила тяги, необходимая для приведения колеса в движение, приближенно совпадает с силой тяги при установившемся движении.*

§ 5. Нить на вращающемся блоке

24. Для гибкой и нерастяжимой нити (векторное) неопределенное уравнение относительного равновесия можно вывести непосредственно из соотношения

$$d\boldsymbol{T}+\boldsymbol{F}\,ds=0,$$

рассмотренного в § 7, гл. XIV, где сохранены прежние обозначения, присоединяя к силе $\boldsymbol{F}\,ds$, действующей на любой элемент нити, силу инерции переносного движения χ. Выставляя на вид ds и выражая χ в виде $\chi^*\,ds$ (где через χ^* обозначена сила инерции переносного движения на единицу длины нити), будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}+\boldsymbol{F}+\chi^*=0. \qquad (11)$$

Особенно интересным является случай, когда нить навернута на жолоб блока и движется вместе с блоком равномерно без относительного скольжения.

Предположим, пренебрегая собственным весом нити по сравнению с натяжением, что сила $\boldsymbol{F}$ для любого элемента ds сводится к реакции, происходящей от блока, в соприкосновении с которым находится этот элемент. Обозначим через r радиус блока, через ω его угловую скорость, через p вес единицы длины нити, предполагаемой однородной, так что p/g есть масса единицы длины (линейная плотность).

Будем отсчитывать дуги в сторону движения и перейдем от уравнения (11) к внутренним уравнениям (см. гл. XIV, § 8), проектируя это уравнение на ребра естественного трехгранника траектории, в обычном предположении, что вектор $\boldsymbol{t}$ направлен в сторону отсчета дуг, т. е. в сторону движения, а вектор $\boldsymbol{n}$ в сторону вогнутости, т. е. в сторону центра блока. Обозначим, как обычно, через F_t, F_n, F_b проекции силы $\boldsymbol{F}$ на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории. Так как жолоб блока может оказывать реакции только наружу (в сторону выпуклости), то проекция F_n необходимо будет отрицательной и мы можем положить ее равной $-N$, обозначая через N величину нормальной реакции. Из трех проекций центробежной силы две, а именно χ_t^* и χ_b^*, будут равны нулю; проекция χ_n^*, будучи направленной наружу, очевидно будет равна $-p\omega^2 r/g$.

Уравнения относительного равновесия веревки принимают таким образом вид

$$\frac{dT}{ds}+F_t=0, \qquad \frac{T}{r}=N+\frac{p}{g}\omega^2 r, \qquad F_b=0. \tag{12'}$$

25. Если мы обратим внимание на то, что величина $p\omega^2 r/g$ является постоянной, и положим

$$T^*=T-\frac{p}{g}\omega^2 r, \tag{13}$$

то можно будет также написать

$$\frac{dT^*}{ds}+F_t=0, \qquad \frac{T^*}{r}=N, \qquad F_b=0; \tag{12}$$

эти уравнения тождественны с уравнениями абсолютного равновесия в аналогичных условиях, за исключением лишь того, что величина T^* представляет здесь не само натяжение, а натяжение, уменьшенное на постоянную величину $p\omega^2 r/g$.

Это замечание позволяет также и в случае относительного равновесия определить предельное соотношение, которое должно существовать между значениями T_A и T_B натяжений на концах

A, B куска нити, когда, при заданном значении одного из них, их разность ΔT достигает максимума, совместимого с существованием равновесия.

Для этого достаточно обратить внимание на то, что на основании соотношения (13) мы можем рассматривать безразлично T или T^*, так как $\Delta T = \Delta T^*$; для этой же последней разности условия максимума [совместимого с уравнениями (12′)] были уже установлены в гл. XIV (п. 61).

Предположив, например, что T_B^* есть бо́льшее из натяжений на концах A и B, мы нашли тогда, что если равновесие существует, то должно быть

$$\frac{T_B^*}{T_A^*} \leqslant e^{f\theta},$$

так что предельное соотношение, при котором еще возможно равновесие, имеет вид

$$\frac{T_B^*}{T_A^*} = e^{f\theta},$$

где θ есть центральный угол (в радианах), соответствующий дуге AB, и f есть коэффициент трения (статического) между нитью и блоком. Подставив вместо T^* его выражение (13), мы получим прежде всего соотношение

$$\frac{T_B - \frac{p}{g}\omega^2 r^2}{T_A - \frac{p}{g}\omega^2 r^2} \leqslant e^{f\theta},$$

выражающее необходимое условие относительного равновесия, т. е. отсутствия скольжения между нитью и вращающимся блоком, и, в частности, равенство

$$\frac{T_B - \frac{p}{g}\omega^2 r^2}{T_A - \frac{p}{g}\omega^2 r^2} = e^{f\theta}, \tag{14}$$

которое и является искомым соотношением между натяжениями на концах, когда одно из них дано и разность достигает наибольшего возможного значения.

То же самое соотношение между T_A и T_B должно, конечно, существовать и тогда, когда, наоборот, предполагается заданной разность ΔT и требуется (совместно с существованием относительного равновесия), чтобы натяжение T_A было наименьшим.

26. Заметим, что мы с самого начала предположили возможным пренебрегать собственным весом нити по сравнению с натяжением.

Так как вес единицы длины нити равен p и нить охватывает приблизительно половину окружности блока, то вес, о котором идет речь (по предположению, ничтожный по сравнению с T) будет равен $\pi p r$. *Отсюда следует, что в равенстве* (14) *можно будет отбросить член* $p\omega^2 r^2/g = \pi p r(\omega^2 r/\pi g)$ *как в числителе, так и в знаменателе и, следовательно, привести равенство к обычному виду*

$$\frac{T_B}{T_A} = e^{f\theta}$$

всякий раз, когда коэффициент $\omega^2 r/\pi g$ *при* $\pi p r$ *не будет очень большим числом.*

В обычных случаях ременной передачи (которую мы будем рассматривать в следующем параграфе) это обстоятельство большею частью будет выполняться. Действительно (принимая метр за единицу длины и секунду за единицу времени), радиус r шкива, вообще говоря, будет < 1, $g = 10$ (приближенно) и $\omega = 2\pi n$, где n обозначает число оборотов в секунду. Например, при $r = 0{,}50$, принимая приближенно $2\pi/g = 2/3$, будем иметь $\omega^2 r/\pi g = 2n^2/3$ и добавочным членом можно пренебрегать, пока речь идет о небольшом числе оборотов в секунду.

27. Произведение $r\Delta T$ при относительном равновесии нити на блоке измеряет (по абсолютной величине) результирующий момент Γ относительно оси блока сил, с которыми нить (или веревка) действует на самый блок. Действительно, любой элемент нити ds в силу принципа равенства действия и противодействия действует силой $-\boldsymbol{F}\,ds$ на элемент (желоба) блока, с которым он соприкасается. Составляющая $-F_b\,ds$ этой силы по бинормали равна нулю, составляющая $-F_n\,ds = N\,ds$ по главной нормали пересекает ось; остается касательная составляющая $-F_t\,ds$, момент которой относительно оси блока равен $-F_t r\,ds$ (положительное направление оси выбирается таким образом, что момент касательной силы положителен, если сила направлена в сторону отсчета дуг, и отрицателен, если сила направлена в противоположную сторону).

Суммируя эти частичные слагаемые $-F_t r\,ds$, т. е. интегрируя по s между двумя концами A и B рассматриваемой дуги и принимая во внимание постоянство r и первое из уравнений (12), получим равенство

$$-r\int\limits_{AB} F_t\,ds = r\int\limits_{AB}\frac{dT}{ds}\,ds = r(T_B - T_A),$$

из которого, приравнивая абсолютные величины, найдем

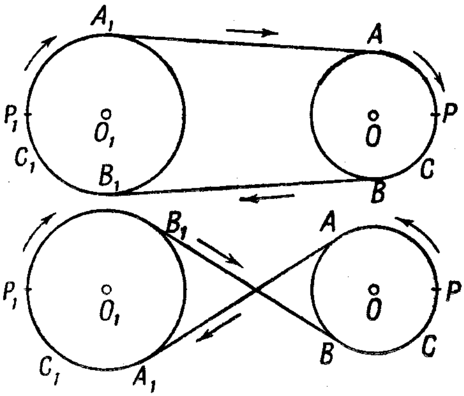
$$\Gamma = r\Delta T,$$

согласно утверждению.

Заметим, что если речь идет о касательных составляющих, направленных в сторону отсчета дуг, произведение $-F_t\,ds$ будет положительным, и величина T должна, следовательно, возрастать от A к B. Тогда имеем $\Delta T = T_B - T_A$.

§ 6. Ременные передачи

28. Вращательное движение можно, как известно, передавать с одного вала на другой, параллельный первому, посредством ремня, натянутого на два шкива, каждый из которых жестко соединен с соответствующим валом; оба шкива должны лежать в одной и той же плоскости, нормальной к обеим осям вращения.



Фиг. 80.

Обратимся к этому случаю и изобразим оба шкива в виде двух окружностей C и C_1 (фиг. 80); обозначим через O и O_1 их центры, т. е. следы соответствующих осей, через A, A_1 и B, B_1 — точки касания общих касательных к двум окружностям (внешних или внутренних в зависимости от того, будет ли передача открытой или перекрестной).

Ремень расположится приближенно по замкнутому контуру, состоящему из двух дуг окружностей $\overset{\frown}{APB}$, $\overset{\frown}{A_1P_1B_1}$ и из двух прямолинейных отрезков AA_1, BB_1. Предполагая для определенности, что C_1 является ведущим шкивом и шкивы вращаются в стороны, указанные на фиг. 80 стрелками, будем называть отрезок BB_1 ремня (в котором движение обращено к ведущему шкиву) *ведущим*, а отрезок AA_1 *ведомым*.

При установившемся режиме точки ремня движутся с постоянной скоростью, которая передается наружным (рабочим) поверхностям ободов шкивов. После того, как материальный элемент ремня приходит в соприкосновение в положении A (или B_1) с материальным элементом шкива C (или шкива C_1), он остается в соприкосновении с тем же самым элементом до положения B (или соответственно A_1).

Поэтому, обозначив через r и r_1 радиусы шкивов C, C_1 и через ω и ω_1 угловые скорости установившегося движения (соответственно вокруг O и O_1), мы получим, приравнивая линейные окружные скорости,

$$r\omega = r_1\omega_1. \tag{15}$$