в которых из осторожности взяли для угла θ численное значение, несколько меньшее того значения, которое он может иметь в каждом конкретном случае. Поэтому мы необходимо будем иметь

$$\frac{T_B - \frac{p}{g}\omega^2 r^2}{T_A - \frac{p}{g}\omega^2 r^2} = e^{f\theta} < e^{f\theta_1}.$$

§ 7. Вес и притяжение Землею. Изменение ускорения силы тяжести с широтою. Отклонение вертикали

33. Рассмотрим материальную точку P, находящуюся вблизи от земной поверхности, и предположим, что P не находится в соприкосновении с другими телами, и на нее не действуют силы, происходящие от каких-либо специальных устройств. Тогда остается одна сила, „вес" точки P, которую можно, следовательно, рассматривать, как такую силу, уравновесив которую, мы помешаем точке падать или, иначе, удержим ее в (относительном) равновесии по отношению к Земле.

Сопоставим это экспериментальное утверждение с законом всемирного тяготения (гл. XI, п. 2). Согласно этому закону на нашу материальную точку P (которая, как мы сказали, предполагается свободной от действия какой-либо искусственно вызванной силы) действуют силы притяжения других тел и только эти силы. Так как, далее, благодаря огромным расстояниям, притяжения различных небесных тел будут ничтожны по сравнению с земным притяжением G, то это притяжение и будет по существу единственной силой, действующей на P. Поэтому для того, чтобы удержать точку P в *абсолютном* равновесии, необходимо и достаточно было бы уравновесить силу G. Если же мы хотим рассматривать относительное равновесие по отношению к осям, неизменно связанным с Землей, то мы должны (п. 3) присоединить к G переносную силу инерции χ, происходящую от движения этих осей (относительно неподвижных звезд).

Таким образом, основываясь на законе всемирного тяготения, мы приходим к заключению, что вес представляет собой *сумму* $G+\chi$ *земного притяжения и переносной силы инерции.*

Прежде всего, путем простой качественной оценки, мы можем убедиться, что поведение величины $G+\chi$ согласуется с поведением силы, наблюдаемой нами как вес.

Переходя от качественной оценки к количественной, мы можем (ограничиваясь даже первым приближением в вычислении G) объяснить характер изменения ускорения силы тяжести на земной поверхности (см. гл. II, п. 27). Это дает нам очевидное подтверждение совершенной достоверности закона Ньютона. Более точные подтверждения этот закон получил в астрономии (движение небесных тел); однако указанная здесь статическая проверка (которая в отличие от опыта Кэвендиша не требует тонких экспериментальных методов) заслуживает внимания.

34. Определение G. Будем рассматривать Землю как шар, состоящий из однородных концентрических слоев. В отношении геометрической формы это предположение близко к действительности, если мы примем во внимание размеры Земли, так как относительные отклонения от сферической формы (происходящие, например, от полярного сжатия, от гор и т. п.) не превосходят (и даже остаются почти всегда значительно меньше) пятитысячных. Что же касается гипотезы о концентрической слоистости, то она вполне приемлема в качестве пробной, так как нет прямого указания о внутреннем строении Земли; с другой стороны, имеется еще одна неопределенность (а именно, закон, по которому изменяется плотность в функции от расстояния от центра), благодаря которой всегда можно предположить, что плотности любого слоя приписано именно то среднее значение, которое принадлежит ему в действительности.

Приняв эти гипотезы, мы в качестве следствия из них получим, что притяжение Земли во внешних точках (и в частности в непосредственной близости от поверхности) оказывается таким (гл. XI, п. 22), какое мы имели бы, если бы вся масса M была сосредоточена в центре O. Вектор G вследствие этого будет направлен к O, и его величина, отнесенная к единице массы притягиваемой точки P, будет иметь значение fM/ρ^2, где f — постоянная тяготения и ρ — расстояние точки P от центра.

Заметим, что если рассматривается область вокруг какой-нибудь точки поверхности Земли с окрестностью в несколько километров, то вектор G, внутри этой области, будет приближенно постоянным по величине и направлению.

Действительно, так как радиус R земного шара равен приближенно 6370 *км*, то радиальное или трансверсальное перемещение в несколько километров очень мало изменит как величину, так и направление его. О порядке величины этих изменений дают представление следующие вычисления.

1. (Изменение направления). При перемещении по сфере радиуса R по дуге (большого круга) Δs угловое отклонение будет равно (в радианах) $\Delta s/R$, или в градусах $(360/2\pi)\cdot(\Delta s/R)$. Предположив, например, что Δs не превосходит 1 *км*, мы увидим, что отклонение не будет превосходить полминуты.

2. (Изменение величины.) При перемещении вдоль радиуса, начиная от $\rho = R$, на ΔR величина $G = fM/\rho^2$ получит изменение

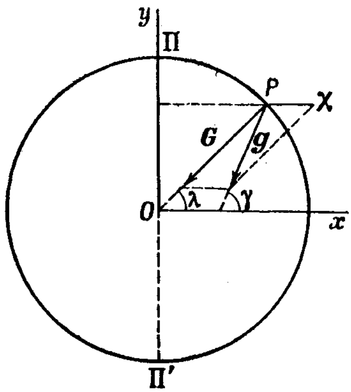
$$\frac{fM}{(R+\Delta R)^2} - \frac{fM}{R^2} = \frac{fM}{R^2}\left\{\left(1+\frac{\Delta R}{R}\right)^{-2} - 1\right\}.$$

Так как ΔR мало по сравнению с R, то, разлагая $(1+\Delta R/R)^{-2}$ в ряд по формуле бинома Ньютона и останавливаясь на первом члене, мы получим для изменения G выражение

$$-\frac{fM}{R^2}\cdot\frac{2\Delta R}{R};$$

следовательно, по абсолютной величине, относительное изменение (т. е. отношение изменения к величине притяжения на поверхности Земли) представится в виде $2\Delta R/R$, что меньше $1/1000$ для высот ΔR, не превосходящих 3 *км*.

35. Обращаясь к вопросу о том, каким образом изменяется сила притяжения G вдоль любого меридиана, выберем систему осей Oxy (фиг. 81), расположенных в плоскости меридиана, с началом O в центре земного шара и с положительными направлениями осей Oy и Ox соответственно к северному полюсу и к меридиану (полуокружности большого круга), о котором идет речь.



Фиг. 81.

Если обозначим через λ широту какой-нибудь точки P меридиана, то $\cos\lambda$ и $\sin\lambda$ очевидно будут направляющими косинусами радиуса-вектора $\overrightarrow{OP}$ точки P (с началом в центре O Земли), и проекции вектора G на оси Ox и Oy будут равны

$$G_x = -G\cos\lambda, \quad G_y = -G\sin\lambda, \tag{18}$$

где величина G есть fM/R^2, и, следовательно, не зависит от λ и постоянна на всей земной поверхности.

36. Точное определение χ. Движение Земли предполагается сложным, складывающимся, как известно, из равномерного вращения вокруг полярной оси ПП′ (суточное вращение) и поступательного движения как неизменяемой системы, в силу которого (согласно законам Кеплера) Земля описывает в течение года вокруг Солнца эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Переносная сила инерции χ будет, следовательно, суммой двух слагаемых: одного χ_1, происходящего от вращения, и другого χ_2, происходящего от поступательного движения. Если мы обратим внимание на то, что в этом последнем движении требуется целый год для того, чтобы совершить один оборот, и что, следовательно, (для промежутков времени, малых по сравнению с периодом) движение приближенно можно рассматривать как прямолинейное и равномерное, то, как уже было сказано выше (п. 5), можно пренебречь вектором χ_2 [1]).

Таким образом остается только одно первое слагаемое χ_1, т. е. центробежная сила, происходящая от суточного вращения Земли. Угловая скорость ω суточного вращения (дуга единичного радиуса, описанная в единицу времени, т. е. в секунду среднего солнечного времени) определяется, как мы знаем (гл. VII, п. 18), выражением

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164},$$

а центробежная сила, действующая на единицу массы, находящуюся на расстоянии δ от полярной оси, равна $\omega^2\delta$. Для точки P на поверхности Земли на широте λ, очевидно, будем иметь $\delta = R\cos\lambda$, а центробежная сила будет действовать в плоскости меридиана, перпендикулярно к полярной оси; поэтому относительно принятых в п. 35 осей будем иметь

$$\chi_x = \omega^2 R\cos\lambda; \qquad \chi_y = 0. \tag{19}$$

Численное значение величины $\omega^2 R$ (имеющей размерность ускорения) будет около 3,4 *см/сек*^{2}.

37. Сравнение с весом. Первое приближение. Так как наибольшее значение центробежной силы χ (которое она принимает при $\lambda = 0$, т. е. на экваторе) равно 3,4 дин, то можно пренебречь ее влиянием на g и считать в первом приближении вес равным земному притяжению. При принятых гипотезах относительно внутреннего строения Земли отсюда следует, что вес тела не изменяется при перемещении из одного места в другое на земной поверхности, и что направление радиуса Земли во всякой точке совпадает с направлением нити с грузом на конце. То и другое очевидно согласуется с данными грубого опыта.

---

[1]) В связи с этим следует вспомнить, что в обращении Земли вокруг Солнца переносное ускорение (которое в силу того, что речь идет о поступательном движении, является одним и тем же для всех точек Земли) будет несколько меньше 1 *см/сек*^{2}, т. е. *около одной тысячной части от* g (гл. VII, п. 18).

Так как χ_2 для точки с массой, равной единице, есть не что иное, как это ускорение, взятое в противоположную сторону, то мы действительно можем при вычислении веса, т. е. g, пренебречь им при том порядке приближения, которым мы здесь пользуемся. Даже когда требуется и большая точность, мы можем пренебречь вектором χ_2, но не потому, что вектор χ_2 сам по себе ничтожен, а потому, что он всегда направлен в сторону, противоположную солнечному притяжению, и поэтому компенсируется солнечным притяжением, которым мы здесь также пренебрегли (п. 33) по сравнению с земным притяжением.

38. Второе приближение. Если мы примем во внимание переносную силу инерции χ, то получим равенство

$$g = G + \chi, \tag{20}$$

которое при первом же взгляде разъясняет тот качественный факт (отмечаемый наблюдением), что ускорение силы тяжести g изменяется, увеличиваясь при перемещении тела от экватора к полюсам. Достаточно принять во внимание, что центробежная сила χ равна нулю на полюсах (так что вес g там сводится к силе притяжения G) и имеет наибольшую величину на экваторе, где она направлена прямо противоположно земному притяжению G и поэтому уменьшает величину g. Между экватором и полюсом, через промежуточные параллели, изменение g идет всегда в одну и ту же сторону. Это можно установить геометрическим путем, но еще более просто можно получить его из явного выражения g через λ, которое мы найдем в ближайшем пункте, рассматривая следствия из формулы (20).

Здесь же заметим, что вес g, как это следует из формулы (20), вместе с G и центробежной силой χ, лежит в меридианной плоскости, проходящей через рассматриваемую точку P, и представляет собой диагональ параллелограмма (фиг. 81), построенного на векторах G и χ. Если обозначим через γ острый угол, который направление такой диагонали (нить с грузом) образует с плоскостью экватора, то γ очевидно будет (несколько) больше λ. Разность $\gamma - \lambda$ называется *отклонением вертикали, происходящим от вращения Земли.*

39. Спроектируем равенство (20) на оси x, y, определенные в п. 35, и изменим знаки в обеих частях равенства; если мы заметим, что проекции вектора g суть $-g\cos\gamma$, $-g\sin\gamma$ и примем во внимание равенства (18) и (19), то получим

$$g\cos\gamma = (G - \omega^2 R)\cos\lambda, \qquad g\sin\gamma = G\sin\lambda.$$

Обозначив через g_0 силу тяжести на экваторе (где $\lambda = \gamma = 0$) из первой из написанных формул, мы будем иметь

$$g_0 = G - \omega^2 R,$$

как это уже было указано в предыдущем пункте. Если положим

$$\frac{\omega^2 R}{g_0} = \varepsilon,$$

где (п. 36) ε *есть отвлеченное число, равное немногим тысячным долям, то будем иметь*

$$G = g_0 + \omega^2 R = g_0(1 + \varepsilon)$$

и проекции вектора $\boldsymbol{g}$ можно будет написать в виде

$$g\cos\gamma = g_0\cos\lambda, \qquad g\sin\gamma = g_0(1+\varepsilon)\sin\lambda; \tag{20'}$$

возводя равенства (20′) в квадрат и складывая, получаем

$$g^2 = g_0^2\{\cos^2\lambda + (1+\varepsilon)^2\sin^2\lambda\} = g_0^2\left\{1 + 2\varepsilon\sin^2\lambda\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right\}.$$

Таким образом доказано утверждение, что g изменяется, постоянно возрастая вместе с λ. Если из обеих частей полученного равенства извлечем квадратный корень и разложим $\left\{1+2\varepsilon\sin^2\lambda \times \times\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right\}^{1/2}$ по формуле бинома Ньютона, пренебрегая членами второго и высшего порядков относительно ε, то будем иметь

$$g = g_0(1+\varepsilon\sin^2\lambda). \tag{21}$$

Эта формула хорошо представляет общий ход изменения силы тяжести вдоль меридиана.

Далее, переходя к более точному приближению, можно установить, что формула (21) хорошо выражает также и *количественно* действительное изменение g, если только величине ε вместо значения $\omega^2 R/g_0$ приписать подходящее числовое значение $\varepsilon = 0{,}005302$ и положить [1]) $g_0 = 978{,}030$ *см/сек*^{2}.

40. Из равенств (20′), умножая первое на $\sin\gamma$, второе на $\cos\gamma$ и вычитая, получим

$$g_0\cos\lambda\sin\gamma - g_0\sin\lambda\cos\gamma - g_0\varepsilon\sin\lambda\cos\gamma = 0;$$

это равенство можно написать в виде

$$\sin(\gamma-\lambda) = \varepsilon\sin\lambda\cos\gamma = \varepsilon\sin\lambda\cos\{\lambda + (\gamma-\lambda)\}.$$

Отсюда прежде всего следует, что $\sin(\gamma-\lambda)$ содержит множитель ε, так что, пренебрегая величиной ε^2, $\cos(\gamma-\lambda) = \sqrt{1-\sin^2(\gamma-\lambda)}$ можно положить равным единице и $\varepsilon\sin(\gamma-\lambda)$ — нулю.

Благодаря этому выражение

$$\varepsilon\cos\{\lambda + \{(\gamma-\lambda)\} = \varepsilon\cos\lambda\cos(\gamma-\lambda) - \varepsilon\sin\lambda\sin(\gamma-\lambda)$$

приближенно сведется к $\varepsilon\cos\lambda$, так что будем иметь

$$\sin(\gamma-\lambda) = \varepsilon\sin\lambda\cos\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\lambda,$$

откуда, подставив угол вместо синуса, получим окончательно (с тем же приближением)

$$\gamma - \lambda = \frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\lambda. \tag{22}$$

[1]) Ср. Pizzetti, Trattato di Geodesia teoretica (Болонья, второе издание, 1928, стр. 15).

Эта формула показывает, что наибольшее отклонение вертикали имеется на широте в 45° ($\sin 2\lambda = 1$). Оно достигает (в радианах) значения $\varepsilon/2$, или в градусах $360\,\varepsilon/4\pi$. При значении ε, указанном в предыдущем пункте, значение последнего выражения оказывается немногим менее 10′.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если твердое тело находится в поступательно-вращательном движении, в котором угловая скорость ω и ускорение a_0 какой-нибудь точки O постоянны, то переносная сила инерции χ (для всякой точки твердого тела) не будет зависеть от времени.

Показать, что не существует других движений твердого тела, обладающих аналогичными свойствами.

2. Тонкий стержень AB, наклоненный под углом θ к вертикали, направленной вверх и проходящей через конец A, вращается вокруг этой вертикали с постоянной угловой скоростью ω. Тяжелый шарик может двигаться без трения по стержню. На каком расстоянии l от A шарик может находиться в относительном равновесии?

3. Тяжелый шарик может двигаться без трения вдоль окружности, которая равномерно вращается вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности.

Показать, что для шарика, в зависимости от случая, могут быть четыре, два или ни одного положения относительного равновесия.

4. Применить статическое понятие об устойчивости (гл. IX, § 4) к относительному равновесию тяжелой точки, вынужденной оставаться на сфере, вращающейся без трения вокруг вертикальной оси (п. 8).

[Принимая во внимание, что работа реакции при перемещении точки по сфере равна нулю, мы придем к рассмотрению (гл. IX, п. 19) потенциала двух сил, веса и центробежной силы, в окрестности положения равновесия.]

5. На какой поверхности, в предположении, что она абсолютно гладкая и равномерно вращается вокруг вертикальной оси, тяжелая точка может находиться всюду в относительном равновесии?

Ответ. На параболоиде $(\omega^2/2)(x^2+y^2) - gz = \text{const}$ (ось Oz направлена вертикально вверх).

6. Пусть C — твердое тело, равномерно вращающееся вокруг неподвижной оси, G — центр тяжести тела. Найти результирующую $\boldsymbol{R}$ и результирующий момент $\boldsymbol{M}$ центробежных сил относительно какой-нибудь точки O оси и вывести затем условия, при которых система центробежных сил равносильна одной силе или одной паре или нулю.

Ответ. Результирующая $\boldsymbol{R}$ тождественна с центробежной силой точки G, в предположении, что в ней сосредоточена вся масса тела. Если за систему отсчета примем систему осей с началом в точке O и с осью z, направленной по оси вращения, то получим

$$\boldsymbol{M} = \omega^2(-A'\boldsymbol{i} + B'\boldsymbol{j}),$$

где ω — есть угловая скорость и A', B' — произведения инерции $\sum m_i y_i z_i$, $\sum\limits_i m_i z_i x_i$.