точки относительно системы $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ в любой момент будет тождественно с ускорением этой же точки относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. I, гл. IV, п. 4); таким образом, *основное уравнение* (1) *будет вполне строгим во всех тех случаях, когда движение точки рассматривается в системе координат, движущейся поступательно и притом прямолинейно и равномерно относительно неподвижных звезд, или, другими словами, в системе координат, оси которой сохраняют неизменные направления относительно неподвижных звезд, а начало движется прямолинейно и равномерно.*

В дальнейшем, когда мы будем пользоваться уравнением (1), мы всегда будем подразумевать (если не будет оговорено противное), что движение точки относится к только что указанной системе отсчета. Такую систему для краткости будем называть *инерциальной* или *галилеевой* системой. Последнее название было предложено Эйнштейном в его первой статье (1905 г.) о теории относительности и теперь всюду принято. Оно вполне оправдывается тем, что в сочинениях Галилея с удивительной ясностью и точностью подчеркнут тот факт, что для двух наблюдателей, находящихся относительно друг друга в прямолинейном и равномерном поступательном движении, физические явления протекают по одним и тем же законам.

Однако мы будем пользоваться уравнением (1) также и для систем отсчета, отличных от указанной [так, мы знаем (т. I, гл. VII, § 7), что оно приближенно справедливо и для осей, неизменно связанных с Землей], но в каждом таком случае мы будем указывать на характер и пределы ошибок, которые при этом будут получаться.

Необходимо добавить, что при формулировке механических задач мы часто будем говорить о неподвижных точках, прямых и плоскостях. Под этим мы будем подразумевать такие точки, прямые и плоскости, которые неподвижны относительно заданной системы отсчета; за такую систему в большинстве случаев будем принимать или галилееву систему, или систему, неизменно связанную с Землей.

§ 2. Общие соображения о движении точки по заданной траектории

2. Пусть P есть материальная точка с массой m, движущаяся (или, в предельном случае, находящаяся в покое) под действием сил, равнодействующая которых есть $\boldsymbol{F}$. Предположим, что мы заранее знаем траекторию c точки (иногда это вполне возможно, если, например, у нас имеются некоторые данные о характере действующих сил). Тогда для определения движения точки P достаточно найти зависимость между положением точки на траектории и временем (т. е. закон движения). Точнее, если s есть длина дуги траектории c между произвольной начальной точкой и точкой P, отсчитываемая в заданном направлении (*криволинейная абсцисса* точки P), то все

сводится к нахождению уравнения движения в конечной форме $s = s(t)$, определяющего положение точки P на заданной траектории c.

Для этой цели возьмем основное уравнение (1)

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

и спроектируем обе его части в любой точке кривой c на касательную, проведенную в направлении возрастающих значений s. Так как касательное ускорение точки P равно $\ddot{s}$ (т. I, гл. II, п. 26), то мы получим следующее скалярное уравнение:

$$m\ddot{s} = F_t \tag{2}$$

(первое внутреннее уравнение движения точки P; см. т. I, гл. VII, п. 31). Предположим, что касательная составляющая F_t силы $\boldsymbol{F}$ известна. Согласно сказанному в п. 22 гл. VII т. I, это означает, что F_t должна быть известной функцией от положения и скорости точки P и, может быть, также и от времени t. Так как на заданной траектории c положение точки P однозначно определяется ее криволинейной абсциссой s, а скорость — скалярной величиной $\dot{s}$ (поскольку направлением скорости в любой точке является направление касательной), то из только что сказанного следует, что составляющая F_t представляет собой известную функцию $f(s,\ \dot{s} \mid t)$ от трех аргументов, $s, \dot{s}, t$, и равенство (2) принимает вид

$$m\ddot{s} = f(s,\ \dot{s} \mid t). \tag{2'}$$

Таким образом, задача о движении точки P по траектории c сводится к определению всех функций $s(t)$, удовлетворяющих уравнению (2'), т. е. к интегрированию одного единственного дифференциального уравнения второго порядка.

В общем случае это уравнение не интегрируется в конечном виде; только в редких случаях, примеры которых мы дадим в §§ 4 и 5, его удается интегрировать в квадратурах.

Однако в анализе доказывается, что при достаточно широких качественных условиях для функции от трех аргументов $f(s,\ \dot{s} \mid t)$ уравнение (2') имеет общий интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных. Так как в нашей механической интерпретации функция $F_t = f(s, \dot{s} \mid t)$ в конкретных задачах этим условиям полностью удовлетворяет, то можно сказать, что на траектории c при заданных действующих силах возможны ∞^2 отличных друг от друга движений; из всех этих движений мы сможем выделить одно, если будем иметь достаточно данных для определения двух постоянных интегрирования.

Так, например, можно доказать, что если функция $f(s, \dot{s} \mid t)$ в определенной области конечна, непрерывна и дифференцируема по любому из трех ее аргументов, то среди интегралов уравнения (2') всегда существует такая функция $s(t)$, которая однозначно определяется следующими условиями: функция s и ее производная при заданном значении t_0 независимой переменной (принадлежащем рассматриваемой области) принимают произвольно заданные (тоже из рассматриваемой области) значения s_0, $\dot{s}_0$. Поэтому мы можем сказать, что при заданных условиях среди возможных движений точки P по траектории c имеется одно и только одно движение, при котором точка P пройдет через произвольно выбранное положение в заданный момент времени и с заданной скоростью.

Подобным же образом в анализе доказывается, что при условиях, которых мы здесь точно не будем указывать, уравнение (2') имеет (по крайней мере для некоторого промежутка времени, или, если угодно, для надлежащим образом выбранной дуги кривой) один и только один интеграл, принимающий для двух заданных значений времени t два произвольно выбранных значения. Поэтому мы можем утверждать, что среди движений точки P по траектории c, определяемых уравнением (2'), существует одно и только одно движение, при котором P в два заданных момента времени проходит через два предписанных положения.

3. Среди ∞^2 движений, определяемых уравнением (2'), может заключаться, в частности, и положение равновесия в какой-нибудь точке s_0. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2') удовлетворялось тождественно (т. е. для всякого значения независимого переменного t), если в него подставить вместо функции $s(t)$ постоянную s_0; следовательно, должно быть

$$f(s_0,\ 0 \,|\, t) = 0$$

при всяком t. Это можно было предвидеть. В самом деле, общее условие равновесия состоит, как мы знаем, в том, что сила должна быть равна нулю, а $f(s_0,\ 0 \,|\, t)$ есть не что иное, как касательная составляющая F_t такой силы, которая удовлетворяет предполагаемому состоянию равновесия движущейся точки в положении $s = s_0$.

§ 3. Несвободное движение точки по кривой. Центростремительная реакция и центробежная сила. Приложения

4. Во многих случаях точка P может двигаться только по заданной линии c благодаря специальным приспособлениям (направляющим, трубам, рельсам, нитям, связи с другими телами). Иными словами, движение точки направляется связями, влияние которых на движение можно представить, как мы знаем (т. I, гл. VII, п. 15), в виде некоторой силы, так называемой реакции связи $\boldsymbol{R}$, заранее неизвестной.

В этих случаях для определения движения точки вообще недостаточно знать тангенциальную составляющую F_t активной силы $\boldsymbol{F}$