определяется следующими условиями: функция s и ее производная при заданном значении t_0 независимой переменной (принадлежащем рассматриваемой области) принимают произвольно заданные (тоже из рассматриваемой области) значения s_0, $\dot{s}_0$. Поэтому мы можем сказать, что при заданных условиях среди возможных движений точки P по траектории c имеется одно и только одно движение, при котором точка P пройдет через произвольно выбранное положение в заданный момент времени и с заданной скоростью.

Подобным же образом в анализе доказывается, что при условиях, которых мы здесь точно не будем указывать, уравнение (2′) имеет (по крайней мере для некоторого промежутка времени, или, если угодно, для надлежащим образом выбранной дуги кривой) один и только один интеграл, принимающий для двух заданных значений времени t два произвольно выбранных значения. Поэтому мы можем утверждать, что среди движений точки P по траектории c, определяемых уравнением (2′), существует одно и только одно движение, при котором P в два заданных момента времени проходит через два предписанных положения.

3. Среди ∞^2 движений, определяемых уравнением (2′), может заключаться, в частности, и положение равновесия в какой-нибудь точке s_0. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2′) удовлетворялось тождественно (т. е. для всякого значения независимого переменного t), если в него подставить вместо функции $s(t)$ постоянную s_0; следовательно, должно быть

$$f(s_0,\ 0\,|\,t)=0$$

при всяком t. Это можно было предвидеть. В самом деле, общее условие равновесия состоит, как мы знаем, в том, что сила должна быть равна нулю, а $f(s_0,\ 0\,|\,t)$ есть не что иное, как касательная составляющая F_t такой силы, которая удовлетворяет предполагаемому состоянию равновесия движущейся точки в положении $s=s_0$.

§ 3. Несвободное движение точки по кривой. Центростремительная реакция и центробежная сила. Приложения

4. Во многих случаях точка P может двигаться только по заданной линии c благодаря специальным приспособлениям (направляющим, трубам, рельсам, нитям, связи с другими телами). Иными словами, движение точки направляется связями, влияние которых на движение можно представить, как мы знаем (т. I, гл. VII, п. 15), в виде некоторой силы, так называемой реакции связи $\boldsymbol{R}$, заранее неизвестной.

В этих случаях для определения движения точки вообще недостаточно знать тангенциальную составляющую F_t активной силы $\boldsymbol{F}$

(т. е. той силы, которая одна приводила бы в движение точку, если бы не было связей). Поэтому при указанном предположении мы должны заменить основное уравнение (1) следующим уравнением:

$$ma = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}; \tag{1'}$$

проектируя обе части его на касательную, получим

$$m\ddot{s} = F_t + R_t. \tag{2''}$$

Здесь тангенциальная составляющая R_t силы $\boldsymbol{R}$ тоже неизвестна.

Однако бывают случаи, когда составляющую R_t можно заранее определить. Ниже, в § 8, мы остановимся подробнее на действии реакции $\boldsymbol{R}$ во время движения, аналогично тому, как это было сделано в гл. IX т. I для случая равновесия. Но уже теперь, если принять во внимание полученные там результаты (а также общие рассуждения п. 3 гл. XV), мы можем путем обобщения заключить, что если речь идет о таких связях, для которых в статических условиях трением можно пренебречь (т. е. о связях идеальных, без трения), то реакция будет нормальна к траектории также и при движении в любом положении движущейся точки. Следовательно, R_t будет равна нулю, и движение будет определяться опять уравнением (2).

Таким образом, *точка, вынужденная* (вследствие связей без трения или приближенно без трения) *оставаться на некоторой кривой, движется по ней так, как если бы она находилась исключительно под действием активной* (касательной) *силы.*

5. Независимо от того, имеется трение или нет, основное уравнение (1')

$$ma = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$$

приводит нас к замечательным выводам. Спроектируем для любой точки траектории обе части уравнения на соответствующую главную нормаль (направленную к центру кривизны) и решим полученное уравнение относительно R_n. Вспоминая выражение $a_n = \frac{v^2}{r}$ для нормального ускорения (т. I, гл. II, п. 26), где v есть абсолютная величина скорости и r — радиус кривизны траектории, получим

$$R_n = m\frac{v^2}{r} - F_n. \tag{3}$$

Составляющая R_n полной реакции $\boldsymbol{R}$ связей, т. е. тел (трубы, рельсов и т. п.), материализующих кривую c, называется центростремительной реакцией связи.

В то время как в случае покоя ($v = 0$) эта составляющая в точности равна и противоположна аналогичной составляющей активной силы, при движении, т. е. когда $v \neq 0$, она содержит в себе в качестве слагаемого, как это видно из равенства (3), величину $m\frac{v^2}{r}$, всегда положительную (направленную по главной нормали в сторону вогнутости или, как иногда говорят, внутрь кривой[1]), прямо пропорциональную квадрату скорости и обратно пропорциональную радиусу кривизны, т. е. по своему значению тем бóльшую, чем больше в рассматриваемом положении кривизна траектории c.

6. На основании закона равенства действия и противодействия силе $\boldsymbol{R}$, с которой связь (т. е. тело или тела, которые ее осуществляют) действует на движущуюся точку, соответствует равная и противоположная сила $-\boldsymbol{R}$, с которой движущаяся точка действует на связь (в положении, занимаемом точкой в какой-нибудь момент времени).

Составляющая силы $-\boldsymbol{R}$ в направлении *внешней* нормали, действующая на связь и равная по величине R_n, называется *центробежной силой* *).

Заметим, что центробежная сила здесь понимается в смысле, отличном от того, в каком она применяется в теории относительного равновесия, гл. XVI, п. 6.

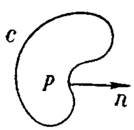
Указанная центробежная сила проявляется, например, в праще, когда ее вращают для метания камня; она же проявляется и тогда, когда шарик, быстро пробегая по кривому жолобу (например, круговому), стремится разрушить внешний его край.

7. Для приспособлений, осуществляющих связи, имеет важное практическое значение, иногда даже большее чем R_n, другая составляющая силы $-\boldsymbol{R}$, нормальная к траектории. Пусть ν — какое-нибудь направление (ориентированное), нормальное к кривой, и θ — угол, который оно образует с главной нормалью n. Так как вектор ускорения является суммой двух составляющих, одной — направленной по касательной и другой — по главной нормали n, то его проекцией a_ν по ориентированному направлению ν будет

$$a_\nu = a_n \cos\theta = m\frac{v^2}{r}\cos\theta$$

---

[1]) Строго говоря, это выражение неправильно, так как в случае замкнутой кривой оно может привести к недоразумению. Это видно, например, из прилагаемой фигуры, где нормаль n направлена в сторону вогнутости, и все же не внутрь кривой c, если рассматривать ее в целом. Однако возможности недоразумения не будет, если мы ограничимся, как это обычно и имеет место, рассмотрением кривой в ближайшей окрестности любого положения точки.



Фиг. 1.

*) *Центробежная сила* в том смыле, в каком она введена здесь авторами, представляет собой *нормальное давление движущейся точки на связь. (Прим. ред.)*

(см. т. I, гл. I, п. 12). Поэтому, проектируя уравнение (1′) на направление ν и определяя R_ν, получим

$$R_\nu = m\frac{v^2}{r}\cos\theta - F_\nu. \qquad (3')$$

Если, как это мы уже делали выше при определении понятия центробежной силы, мы изменим направление ν нормали на противоположное, то выражение (3′) даст составляющую силы $-\boldsymbol{R}$ по направлению ν (измененному). Полагая в этом направлении $\theta = 0$, получим опять равенство (3).

8. Интересные приложения формулы (3′) получим, рассматривая случай, когда активная сила сводится к силе тяжести. Если обозначить через α угол, образуемый нормалью ν с вертикалью, направленной вниз (подчеркнем еще раз, что при $\theta = 0$ нормаль ν переходит в главную нормаль n, направленную в сторону вогнутости), то будем иметь $F_\nu = mg\cos\alpha$, и равенство (3′) примет вид

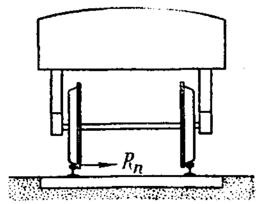
$$R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\cos\alpha\right). \qquad (4)$$

Важно отметить, что это выражение R_ν будет иметь место и в том случае, когда, помимо силы тяжести, имеются и другие активные *чисто касательные силы*, так как эти силы не дают составляющей при проектировании на направление ν.

Если траектория расположена в горизонтальной плоскости, то главная нормаль n будет горизонтальна и, следовательно, в этом случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Полагая в равенстве (4) $\theta = 0$, мы увидим, что в этом случае составляющая R_n является величиной существенно положительной (если только речь идет действительно о криволинейном движении, т. е. если скорость v и кривизна $\frac{1}{r}$ отличны от нуля). Отсюда следует, что связи подвергаются действию центробежной силы (направленной по внешней нормали), и притом тем большей, чем больше масса и скорость.

9. Возвышение внешнего рельса. Указанные условия осуществляются, например, при движении железнодорожного вагона на закруглении.

Сосредоточим наше внимание на колесах и учтем тот хорошо известный факт (фиг. 2), что они снабжены с внутренней стороны выступом (ребордой), предназначенным для того, чтобы препятствовать сходу с рельсов.



Фиг. 2.

На закруглении пути связью, противодействующей центробежной силе, будет служить *внешний рельс*. Этот рельс будет испытывать со стороны реборды давление, направленное наружу, по нормали к рельсам (эта нормаль лежит в плоскости пути). Внутренний же рельс не будет испытывать аналогичного действия со стороны реборды соответствующего колеса. Это приводит к тому, что на горизонтальном закруглении внешний рельс должен противодействовать значительному усилию, стремящемуся его разрушить. Поэтому внешний рельс располагают несколько выше внутреннего, причем возвышение определяется таким образом, чтобы действие центробежной силы сделать равным нулю или, по крайней мере, уменьшить.

Для того чтобы оценить требуемое возвышение, обратим внимание на то, что в общем случае величина давления определяется абсолютной величиной правой части равенства (4). Из этого равенства видно, что если траектория не лежит в горизонтальной плоскости, то появляется слагаемое $-g\cos\alpha$, которым можно воспользоваться, чтобы уменьшить или совсем исключить влияние первого слагаемого $\frac{v^2}{r}\cos\theta$.

В нашем случае направлением ν, входящим в формулу (4), является нормаль к рельсам, расположенная в плоскости пути. Следовательно, для достижения указанной цели эта плоскость должна быть уже не горизонтальной, а наклонной, и притом так, чтобы внешний рельс лежал выше внутреннего. С другой стороны, каждый из двух рельсов остается расположенным в горизонтальной плоскости. Поэтому главную нормаль надо рассматривать как горизонтальную прямую. В таком случае угол θ между n и ν будет углом наклона плоскости пути к горизонтальной плоскости. Следовательно, угол α между ν и направленной вниз вертикалью будет равен $90^\circ-\theta$, и формула (4) примет вид

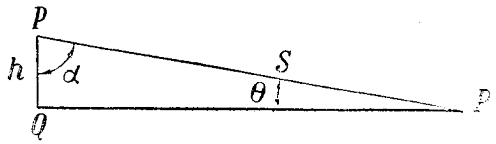
$$R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\sin\theta\right).$$

Таким образом, зная r, т. е. радиус закругления, и среднюю скорость v (вычисленную для различных поездов, проходящих по линии), мы получим давление R_ν на внешний рельс в среднем равным нулю, если определим наклон θ из равенства

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg}. \qquad (5)$$

Для скоростей бо́льших средней, давление R_ν будет положительным, т. е. R_ν будет направлено наружу; для скоростей же, меньших средней, давление R_ν будет направлено в противоположную сторону, т. е. во внутрь. Иными словами, в первом случае давление будет испытывать внешний рельс, а во втором — внутренний рельс. Но в том и другом случае, если скорость поезда не слишком отличается от средней, и то, и другое давление будет заключаться в допустимых пределах.

10. Величину возвышения одного рельса над другим мы получим из уравнения (5) на основании следующих соображений. Пусть P (фиг. 3) есть точка внешнего рельса в плоскости пути. Проведем через P нормаль ν к рельсу в плоскости пути, и пусть P' будет точка, в которой эта нормаль встречает внутренний рельс. Отрезок $PP' = s$ изображает расстояние между рельсами, он называется *шириной колеи*[1]). Обозначим через Q проекцию точки P на горизонтальную плоскость, проходящую через P', и рассмотрим треугольник PQP'. Отрезок PQ измеряет искомое возвышение h, а угол при P' (между ν и горизонталью) равен углу наклона плоскости пути к горизонтальной плоскости — θ. Имеем



Фиг. 3.

$$\sin\theta = \frac{h}{s},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}}.$$

Подставляя в уравнение (5), получаем

$$\frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}} = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{r}.$$

Следовательно, для определения h получаем квадратное уравнение. Вполне понятно, что на практике наклон θ должен быть малым. В таком случае синус можно заменить тангенсом, т. е. в уравнении (5) прямо положить

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{s}.$$

Тогда для h будем иметь более простое выражение:

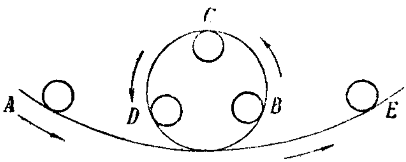
$$h = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{s}{r}. \tag{5'}$$

Пусть, например, радиус закругления равен 1000 *м*. Принимая среднюю скорость равной 15 *м/сек* (54 *км/час*), мы для возвышения h получим значение

$$h = \frac{225 \cdot 1{,}445}{9{,}8 \cdot 1000}\ м = 33\ мм.$$

[1]) Почти во всех странах Европы (исключение составляют только СССР и Испания) ширина колеи нормальных железнодорожных линий равна 1,445 *м*. В СССР она равна 1,524 *м*.

11. Мертвая петля. При помощи формулы (4) можно объяснить акробатический номер, известный под названием мертвой петли. Велосипедист (или автомобилист) пробегает вертикальную траекторию $ABCDE$, изображенную на фиг. 4 (точнее — приблизительно вертикальную, так как вторая половина траектории CDE несколько смещена относительно первой половины ABC). Он находится все время на вогнутой стороне траектории, так что в наиболее высокой точке C петли будет расположен вниз головой.



Фиг. 4.

Здесь, как и в примере с железнодорожным вагоном, среди активных сил имеется движущая сила, возникающая в случае велосипеда от нажима на педали, а в случае автомобиля — в результате работы мотора. Однако эта сила направлена по касательной к траектории, и поэтому уравнение (4) сохраняется. В данном случае траектория движения реализуется опорной кривой, нормальная реакция этой кривой должна быть направлена в сторону опирающегося на них тела (велосипеда), т. е. в сторону вогнутости. Следовательно, такое движение велосипедиста будет возможно только при том условии, когда $R_n > 0$. С другой стороны, это условие и достаточно, потому что опора может развить нормальную реакцию, направленную в сторону опирающегося тела, какой угодно величины (если только опора обладает достаточной прочностью).

Поэтому все сводится к тому, чтобы подобрать кривизну и скорость так, чтобы всюду имело место соотношение

$$\frac{v^2}{r} > g\cos\alpha.$$

Условие это будет выполнено наверное, если взять

$$v > \sqrt{gr}.$$

Пусть в наиболее опасной части петли радиус кривизны равен приблизительно 3 *м*; тогда для успеха номера будет достаточно довольно умеренной скорости — немного большей, чем 6 *м/сек*. Это соответствует скорости 21,6 *км/час*, которая на небольшом участке пути велосипедистом легко может быть достигнута. Этот цирковой номер требует прежде всего силы и хладнокровия.

§ 4. Силы, зависящие от положения точки. Характерный признак упругих или восстанавливающих сил

12. В п. 2 мы указали, что уравнение (2') движения точки по заданной траектории интегрируется в квадратурах только в немногих частных случаях. В этом и следующем параграфах мы рассмо-