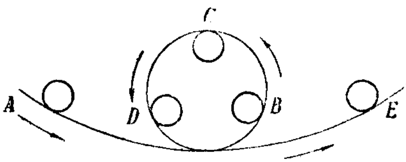
11. Мертвая петля. При помощи формулы (4) можно объяснить акробатический номер, известный под названием мертвой петли. Велосипедист (или автомобилист) пробегает вертикальную траекторию $ABCDE$, изображенную на фиг. 4 (точнее — приблизительно вертикальную, так как вторая половина траектории CDE несколько смещена относительно первой половины ABC). Он находится все время на вогнутой стороне траектории, так что в наиболее высокой точке C петли будет расположен вниз головой.



Фиг. 4.

Здесь, как и в примере с железнодорожным вагоном, среди активных сил имеется движущая сила, возникающая в случае велосипеда от нажима на педали, а в случае автомобиля — в результате работы мотора. Однако эта сила направлена по касательной к траектории, и поэтому уравнение (4) сохраняется. В данном случае траектория движения реализуется опорной кривой, нормальная реакция этой кривой должна быть направлена в сторону опирающегося на них тела (велосипеда), т. е. в сторону вогнутости. Следовательно, такое движение велосипедиста будет возможно только при том условии, когда $R_n > 0$. С другой стороны, это условие и достаточно, потому что опора может развить нормальную реакцию, направленную в сторону опирающегося тела, какой угодно величины (если только опора обладает достаточной прочностью).

Поэтому все сводится к тому, чтобы подобрать кривизну и скорость так, чтобы всюду имело место соотношение

$$\frac{v^2}{r} > g \cos \alpha.$$

Условие это будет выполнено наверное, если взять

$$v > \sqrt{gr}.$$

Пусть в наиболее опасной части петли радиус кривизны равен приблизительно 3 *м*; тогда для успеха номера будет достаточно довольно умеренной скорости — немного большей, чем 6 *м/сек*. Это соответствует скорости 21,6 *км/час*, которая на небольшом участке пути велосипедистом легко может быть достигнута. Этот цирковой номер требует прежде всего силы и хладнокровия.

§ 4. Силы, зависящие от положения точки. Характерный признак упругих или восстанавливающих сил

12. В п. 2 мы указали, что уравнение (2′) движения точки по заданной траектории интегрируется в квадратурах только в немногих частных случаях. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим два таких случая, когда действующие силы удовлетворяют определенным условиям.

Прежде всего рассмотрим *силы, зависящие от положения* точки (т. I, гл. VII, п. 22), т. е. примем, что

$$F_t = f(s).$$

В таком случае уравнение (2') примет вид

$$m\ddot{s} = f(s). \tag{6}$$

Покажем, что уравнение (6) посредством одной квадратуры сводится к уравнению первого порядка с одной произвольной постоянной. Для этого вспомним, что в рассматриваемом случае живая сила T движущейся точки определяется выражением $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$, следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = m\ddot{s}\dot{s}.$$

С другой стороны, мы знаем, что если f является функцией только от s, то существует другая функция U, зависящая тоже только от s (вернее, существует бесконечно много таких функций, отличающихся друг от друга аддитивной постоянной) и притом такая, что

$$\frac{dU}{ds} = f, \tag{7}$$

т. е. U представляет собой не что иное, как неопределенный интеграл $\int f ds$.

Поэтому, умножая обе части равенства (6) на $\dot{s}$, можно написать его в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{ds}\dot{s}.$$

Поскольку U рассматривается как сложная функция от t через посредство s, правая часть есть не что иное, как производная от U по t. Следовательно, интегрируя по t и обозначая постоянную интегрирования через E, получим

$$T - U = E. \tag{8}$$

Это соотношение в конечной форме между кинетической энергией T движущейся точки и ее положением на кривой (определяемом функцией $U(s)$), называется ***интегралом энергии***. В конечном счете оно дает соотношение между s и $\dot{s}$ (и произвольной постоянной), т. е. дифференциальное уравнение первого порядка. Проинтегрировав его, мы закончим интегрирование уравнения (6). Но предварительно остановимся немного на интеграле энергии (8).

13. Изучая первые следствия из постулатов механики (гл. VIII, п. 11), мы уже видели, что равенство (8) имеет место для всех движений, в которых силы консервативны; для таких движений U означает соответствующий потенциал.

В нашем случае, когда траектория предполагается заданной, мы пришли к равенству (8), не вводя предположения, что силы консервативны. В самом деле, вполне достаточно, чтобы они зависели только от положения; в таком случае равенство (7) определяет некоторую функцию только от s, играющую роль обыкновенного потенциала, причем особенность этой функции (производная ее равна силе) заключается в том, что она налагает ограничение на движение точки вдоль кривой c и на тангенциальную составляющую f силы.

Разность между значениями U, соответствующими двум точкам s_0 и s_1, на основании равенства (6) всегда равна

$$\int_{s_0}^{s_1} f ds = \int_{s_0}^{s_1} F_t ds,$$

следовательно, равна работе, совершаемой силой $\boldsymbol{F}$ при переходе движущейся точки из положения s_0 в положение s_1. Это оправдывает определение величины — U (ср. т. I, гл. VIII, п. 8) как формы энергии, получаемой движущейся точкой в результате перехода в определенное положение (на кривой c). Уравнение (8) выражает также закон сохранения энергии (в виде суммы двух энергий: кинетической и потенциальной) для материальной точки P.

Если сила $\boldsymbol{F}$ представляет собой производную от потенциала, то этот последний, рассматриваемый как функция положения точки на кривой c, т. е. как функция дуги s кривой, удовлетворяет уравнению (7), и, следовательно, совпадает с U с точностью до некоторой (несущественной) аддитивной постоянной.

В самом деле, обозначим через U' этот потенциал. При переходе точки P в другое какое угодно бесконечно близкое положение полный дифференциал dU' этого потенциала представляет собой элементарную работу, совершаемую силой при таком перемещении. Отсюда следует, что если перемещение ds происходит вдоль кривой c, то должно быть

$$dU' = F_t\, ds = f ds,$$

т. е. dU' совпадает с dU.

14. Интересно отметить, что если материальная точка, на которую действует активная сила, представляющая собой производную от потенциала U, вынуждена двигаться вследствие наличия идеальных связей по заданной траектории, то равенство (8) все же выполняется, потому что тангенциальная составляющая полной силы сводится к $\frac{dU}{ds}$.

С другой стороны, равенство (8) выполняется и для движения при отсутствии связей под действием консервативной силы.

Поэтому в обоих случаях имеем

$$T_1 - T_0 = U_1 - U_0,$$

где T_0 и U_0, T_1 и U_1 суть значения T и U для двух любых моментов времени t_0 и t_1.

Из этого соотношения вытекает интересное следствие. Рассмотрим две материальные точки с равной массой, начинающие (или продолжающие) движение с одинаковой скоростью из общей точки или из разных точек, лежащих на одной и той же поверхности $U = \text{const}$.

Следовательно, в начальный момент времени T_0 и U_0 в обоих случаях имеют одно и то же значение. Если обе эти точки движутся под действием некоторой силы, представляющей собой производную от потенциала U, причем одна точка движется свободно, а другая — вдоль некоторой кривой, являющейся идеальной связью, то обе точки будут пересекать любую эквипотенциальную поверхность с одинаковой скоростью.

Так, например, если две тяжелые точки с равной массой начинают падать, из состояния покоя, одна свободно, а другая по заданной направляющей (без трения), то, достигнув одного и того же уровня, обе точки будут иметь одну и ту же скорость.

Отсюда как следствие вытекает известный закон Галилея, согласно которому тяжелое тело, опустившись с определенной высоты вдоль наклонной плоскости, будет иметь всегда одну и ту же скорость независимо от угла наклона.

15. Вернемся к задаче интегрирования уравнения движения (6). Будем исходить из интеграла живой силы (8); полагая

$$\frac{2}{m}\{U(s)+E\} = \Phi(s), \tag{9}$$

его можно представить в виде

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Phi(s). \tag{8'}$$

Отсюда получаем

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\Phi(s)},$$

причем тот или другой знак берется в зависимости от того, будет ли алгебраическое значение скорости $\frac{ds}{dt}$ положительным или отрицательным, или, другими словами, будет ли движение совершаться в сторону возрастающих значений s или в обратном направлении. Разделяя переменные, получим уравнение

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

по существу эквивалентное первоначальному уравнению (6). Это уравнение интегрируется одной квадратурой и дает искомое конечное соотношение между s и t. Произвольными постоянными, определяющими решение, будут постоянная E интеграла живой силы и аддитивная постоянная, появляющаяся при последнем интегрировании.

16. Среди сил $f(s)$, зависящих от положения точки, заслуживают особого внимания так называемые *восстанавливающие силы*, стремящиеся возвратить рассматриваемую материальную точку в определенное положение O на кривой c.

Такие силы характерны тем, что в точке O они исчезают, во всякой же другой точке кривой c они действуют как притяжение к точке (направленное по касательной к кривой — здесь мы рассматриваем только касательную составляющую), причем это притяжение возрастает с удалением от точки O вдоль кривой. Такое поведение является типичным для *упругих* сил, в чем легко убедиться на примере пружины; действие последней тем больше, чем сильнее она растянута или сжата, т. е. чем больше она отклонена от того естественного состояния, в котором исчезает всякое ее действие.

Если мы будем отсчитывать дуги от положения, в котором исчезает действие силы (или, другими словами, от положения равновесия), то указанное характерное свойство восстанавливающей силы с аналитической точки зрения выразится следующим образом: функция $f(s)$ исчезает при $s=0$, имеет знак, всегда противоположный знаку s (это равносильно соотношению $sf(s)<0$ для любого значения s, не равного нулю, и указывает, что рассматриваемая сила имеет характер притяжения), и, наконец, по абсолютной величине возрастает вместе с абсолютной величиной аргумента.

17. Наиболее простым случаем восстанавливающей силы будет, естественно, тот, когда эта сила прямо пропорциональна расстоянию от положения равновесия. Обозначая через λ положительный коэффициент пропорциональности, будем иметь

$$f(s) = -\lambda s. \tag{10}$$

Это выражение можно считать *типичным для упругой восстанавливающей силы*.

К нему можно прийти также путем следующего рассуждения. Предполагая, что $f(s)$ имеет непрерывные первую и вторую производные, разложим $f(s)$ в окрестности $s=0$ в ряд Маклорена и ограничимся тремя первыми членами; тогда получим

$$f(s)=f(0)+sf'(0)+\frac{s^2}{2}f''(s_1),$$

где s_1 есть некоторое значение между 0 и s. Ограничиваясь рассмотрением действия силы в достаточно малой окрестности положения равновесия O, величиной s^2 по сравнению с s можно пренебречь; следовательно, если предположить, что $f'(0)\neq 0$, то порядок величины произведения $sf'(0)$ будет значительно превышать порядок величины дополнительного члена $\frac{s^2}{2}f''(s_1)$, содержащего множителем s^2 (так как f'' по предположению есть величина конечная). Далее, так как $f(0)=0$, то в достаточно малой окрестности точки O можно принять $f(s)$ приближенно равной линейному члену разложения $sf'(0)$. Коэффициент $f'(0)$ не может быть положительным, потому что в противном случае мы не имели бы восстанавливающей силы. Итак, мы снова пришли к типичному выражению (10).

18. Закон движения, вызываемого силой $-\lambda s$, возвращает нас к хорошо известному классу движений. В самом деле, обозначая через ω^2 существенно положительное число λ/m, мы приведем уравнение (6) в этом случае к виду

$$\ddot{s}+\omega^2 s=0,$$

а это есть не что иное, как уравнение гармонического колебания (т. I, гл. II, п. 36), с той только разницей, что здесь вместо x входит s и, следовательно, вместо прямолинейного движения рассматривается движение по кривой c.

Период колебаний $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, как легко видеть, однозначно определяется природой восстанавливающей силы и массой движущейся точки; амплитуда колебаний и фаза, которые появляются в законе движения, выраженном в конечной форме, как постоянные интеграции, наоборот, зависят от начальных условий.

Исследование движения в общем случае, т. е. при какой угодно восстанавливающей силе, мы отложим до § 6; пока же заметим, что качественный характер движения будет оставаться аналогичным характеру движения в рассмотренном простом случае, а именно, всегда будут иметь место периодические колебания движущейся точки (если не просто синусоидальные) в ту и другую сторону от положения равновесия O. При этом наибольшие расстояния от O, достигаемые движущейся точкой (максимальные значения s и $-s$), не всегда будут равными, как это имеет место в гармоническом движении.