§ 5. Силы, зависящие только от скорости. Пассивные сопротивления. Гидравлическое сопротивление. Случай движения снаряда

19. Уравнение (2′) движения точки по заданной траектории интегрируется в квадратурах также и в том случае, когда тангенциальная сила зависит только от скорости. Уравнение (2′) в этом случае принимает вид

$$m\ddot{s} = f(\dot{s}),$$

откуда, разделяя переменные $\dot{s}$ и t, получим

$$m\frac{d\dot{s}}{f(\dot{s})} = dt.$$

Отсюда посредством одной квадратуры выводится конечное соотношение между $\dot{s}$ и t или же между $\dot{s}$ и $t - t_0$, если через t_0 обозначить постоянную интегрирования. Если разрешить это соотношение относительно $\dot{s}$, то $\dot{s}$ $\left(\text{или } \frac{ds}{dt}\right)$ будет выражено через $t - t_0$. Тогда достаточно одной новой квадратуры для того, чтобы найти $s(t)$.

20. Пассивным сопротивлением мы назвали (см. т. I, гл. VII, п. 23) такую силу, которая всегда стремится противодействовать движению, т. е. образует с направлением скорости тупой угол.

В настоящем случае мы будем рассматривать силу $F_t = f(\dot{s})$ как пассивное сопротивление, если она всегда имеет знак, противоположный знаку $\dot{s}$. В таком случае (допуская, что рассматриваемая сила есть непрерывная функция скорости) необходимо, чтобы было $f(0) = 0$; в самом деле, в противном случае $f(\dot{s})$ для достаточно малого $\dot{s}$ имела бы знак, одинаковый со знаком $f(0)$, и, следовательно, не могла бы его изменить вместе с $\dot{s}$, как это необходимо для пассивного сопротивления.

21. Наиболее простым выражением пассивного сопротивления, очевидно, будет

$$f(\dot{s}) = -b\dot{s}, \tag{11}$$

где через b обозначена некоторая *положительная* постоянная. По соображениям, аналогичным тем, которые были изложены в п. 15, уравнение (11) можно рассматривать как типичное выражение пассивного сопротивления для всех тех случаев, когда рассматриваются малые скорости. К этой категории пассивных сопротивлений принадлежит, по крайней мере в первом приближении, сопротивление, возникающее в вязкой, жидкой или в газообразной среде при медленном движении в ней твердого тела. Значение коэффициента b

существенно зависит от свойств среды, от размеров и формы движущегося тела (когда речь идет о локализации тела на кривой c, его следует мысленно заменить материальной точкой). Так, например, при медленном движении шара радиуса r в вязкой жидкости теория дает для коэффициента b значение

$$b = 6\pi\mu r, \quad [\mu] = mt^{-1}l^{-1},$$

где коэффициент вязкости μ, измеренный в единицах CGS и при температуре в 15°, равен для воды 0,0115 и для воздуха 0,000189.

Следовательно, измеряя r в сантиметрах, а $\dot{s}$ в сантиметрах в секунду, получим силу $b\dot{s}$ в динах. Для того чтобы получить ее в граммах, необходимо, очевидно, разделить полученное значение в динах на $g = 981$.

22. Необходимо заметить, что при быстром движении закон сопротивления среды уже не будет линейным. Для скоростей, обычно встречающихся на практике, а именно между 2 и 200 *м/сек*, сопротивление приблизительно пропорционально квадрату скорости[1]. Это так называемый ***квадратичный*** или ***гидравлический*** закон сопротивления, одинаково хорошо применимый как для воды, так и для воздуха. Коэффициент при v^2 можно взять в форме $KA\alpha$, где множитель K зависит только от свойств среды и пропорционален ее плотности, A есть площадь миделева сечения движущегося тела, т. е. площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, и α — отвлеченное число, зависящее от формы, но не от размеров движущегося тела, и от ориентировки тела относительно направления движения, предполагаемого поступательным.

Очевидно, что при A и α, равных единице, коэффициент K будет представлять собой сопротивление среды.

Принимая для квадрата (в виде тонкой пластинки, движущейся перпендикулярно к своей плоскости) $\alpha = 1$, получим для воды как среднее из многочисленных опытов[2]

$$K = 94{,}6 \text{ кг/м}^2,$$

а для воздуха

$$K = 0{,}08 \text{ кг/м}^2.$$

Заметим, впрочем, что последнее значение действительно только для квадратных пластинок с площадью, большей 1 *м*². В случае же пластинок с меньшей площадью коэффициент K несколько меньше

---

[1] Опыты, произведенные недавно для большого диапазона скоростей, как будто показали, что в интервале от 75 до 100 *м/сек* наблюдается небольшое уменьшение коэффициента пропорциональности (см., например, Fuchs — Hopf, *Aërodynamik*, Berlin, Schmidt, 1922).

[2] См., например, G. Eiffel, La résistence de l'air (Paris, 1910).

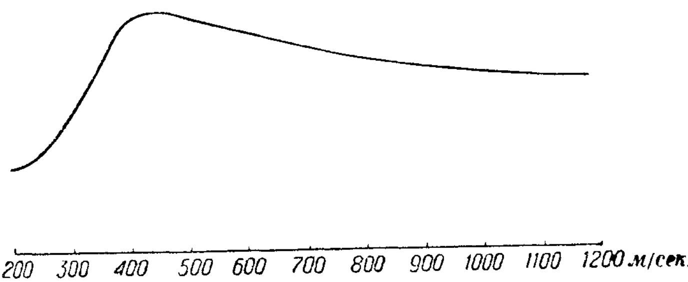
и для пластинок с площадью в несколько квадратных сантиметров достигает значения 0,066.

Итак, общим выражением квадратичного сопротивления будет

$$f(\dot{s}) = \pm KA\alpha v^2 = \pm KA\alpha \dot{s}^2.$$

Двойной знак вводится потому, что направление силы всегда противоположно направлению скорости, и поэтому надо брать знак минус, когда движение прогрессивное ($\dot{s} > 0$), и знак плюс, когда движение регрессивное ($\dot{s} < 0$).

23. Для движений с еще более значительными скоростями, встречающимися, например, в баллистике, сопротивление фактически уже не остается пропорциональным квадрату скорости, а следует совсем



Фиг. 5.

другому закону. В общем случае сопротивление воздуха, отнесенное к единице массы, можно представить в виде $\lambda F(v)$, где λ — коэффициент, зависящий от формы снаряда и от плотности воздуха (аналогично коэффициенту $KA\alpha$), но не зависящий от скорости, а $F(v)$ есть функция только скорости v.

Сиаччи[1] первым начал систематические опыты с целью определения функции $F(v)$. В результате своих исследований он получил для частного $K(v) = \frac{F(v)}{v^2}$ (которое в случае квадратичного сопротивления должно было бы быть постоянным) кривую, изображенную на фиг. 5. Мы видим, что, начиная с 200 *м/сек*, кривая быстро поднимается, при скорости, близкой к скорости звука, имеет точку перегиба и достигает максимума между 400 и 500 *м/сек*, после чего медленно опускается, по крайней мере для скоростей, проверенных до сих пор на опыте.

[1]) Франческо Сиаччи (Francesco Siacci) родился в Риме в 1839 г., умер в Неаполе в 1907 г. Преподавал баллистику в Практической школе артиллерийских и инженерных наук (Scuola d'Applicazione d'Artiglieria e Genio в Турине. Состоял профессором в университете сначала в Турине, а потом в Неаполе. Известен как автор трактата по баллистике (F. Siacci, Balistica 2 изд., Torino, 1888) и ряда других крупных работ.