§ 6. Движение под действием позиционной силы

24. В предыдущих параграфах мы изложили общие сведения элементарного характера, относящиеся к динамике одномерного движения точки. Перейдем теперь к углублению этих сведений, иллюстрируя изложение рядом типичных задач.

Прежде всего займемся изучением качественной стороны движения точки по заданной траектории под действием какой угодно позиционной силы. Возьмем соответствующее уравнение живых сил (8′)

$$\dot{s}^2 = \Phi(s);$$

на основании равенств (7) и (9) имеем

$$\frac{1}{2} m \frac{d\Phi}{ds} = f(s) = F_t. \tag{9′}$$

Уравнение (8′) есть необходимое следствие из основного уравнения (2′)

$$m\ddot{s} = f(s)$$

и, обратно, из уравнения (8′) неизбежно вытекает уравнение (2′) для всех моментов времени, кроме тех, для которых $\dot{s} = 0$. В самом деле, дифференцируя уравнение (8′) по t и принимая во внимание равенство (9′), получаем

$$2\dot{s}(m\ddot{s} - f(s)) = 0.$$

Поэтому при исследовании движения мы можем пользоваться уравнением (8′) вместо уравнения (2′) до тех пор, пока скорость не обратится в нуль; для тех же моментов времени, когда $\dot{s} = 0$, уравнения (8′) будет недостаточно. Необходимо также убедиться в том, что удовлетворяется уравнение (2′).

Относительно функции $\Phi(s)$, входящей в уравнение (8′), мы сделаем одно аналитическое допущение, хорошо согласующееся с характерными чертами тех явлений, с которыми мы встречаемся в механике. А именно, предположим, что функция $\Phi(s)$ при всех тех конечных значениях s, которые мы будем рассматривать, конечна и непрерывна вместе со своими производными всех порядков; следовательно, для всякого возможного корня s_1 уравнения $\Phi(s) = 0$ между последовательными производными функции $\Phi(s)$ всегда найдется такая, которая при $s = s_1$ будет отлична от нуля. Этому условию наверное удовлетворяют все аналитические и регулярные функции *) $\Phi(s)$ для тех значений s, которые нам придется здесь рассматривать.

*) Аналитическая функция $f(z)$ называется *правильной* или *регулярной* в точке a, если внутри некоторого круга с центром в точке a она может быть разложена в ряд Тэйлора

$$f(z) = A + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

(Прим. ред.)

25. Далее, заметим, что при движении, определяемом уравнением (8′), функция $\Phi(s)$, равная квадрату скорости, всегда или положительна, или равна нулю. Следовательно, в зависимости от начальных условий могут быть два случая, а именно, для значения s_0, соответствующего начальному положению движущейся точки, будет $\Phi(s_0)>0$ или $\Phi(s_0)=0$.

В первом случае в свою очередь представляются две возможности. В самом деле, предполагая $\Phi(s_0)>0$, будем иметь для скорости $\dot{s}_0$ на основании уравнения (8′) два возможных значения

$$\dot{s}_0=\pm\sqrt{\Phi(s_0)},$$

не равных нулю и отличающихся друг от друга только знаком; тот или другой знак определяется установленным произвольно положительным направлением на кривой, по которому начинается движение. После выбора направления получаем для движения одно из двух дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\dot{s}=\pm\sqrt{\Phi(s)}.$$

Это уравнение определяет движение до тех пор (см. предыдущий пункт), пока скорость не обращается в нуль, т. е. пока s не совпадает с одним из корней $\Phi(s)$.

Таким образом, случай $\Phi(s_0)>0$ распадается на два частных случая: или от s_0 до $\pm\infty$ в направлении движения не встречается больше корней $\Phi(s)$; или же в указанном направлении существует первый корень s_1 функции $\Phi(s)$.

26. Рассматривая первый частный случай, предположим для определенности, что $\dot{s}_0>0$; следовательно, согласно сказанному выше движение определяется уравнением

$$\dot{s}=\sqrt{\Phi(s)} \tag{8''}$$

и при $s\geqslant s_0$ $\Phi(s)$ всегда >0. Из уравнения (8″), разделяя переменные, как в п. 15, получаем

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{12}$$

Так как $\Phi(s)$ при $s\geqslant s_0$ в нуль не обращается, то мы можем увеличивать криволинейную абсциссу s от ее начального значения s_0 до бесконечности. Следовательно, t, как показывает уравнение (12), будет все время расти (начальное значение t можно принять равным нулю), т. е. t будет монотонной функцией от s.

Если функция $\dfrac{1}{\sqrt{\Phi(s)}}$ допускает интегрирование в бесконечных, то t при неограниченном возрастании s будет стремиться к некоторому конечному пределу t_1; в противном случае t будет стремиться к бесконечности. Следовательно, из монотонности функции $t(s)$ вытекает, что обратная функция $s(t)$ будет также монотонной. Эта функция $s(t)$ согласно определению удовлетворяет уравнению (8″) и при $t=0$ принимает значение s_0. На основании теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка (эта теорема справедлива при весьма широких качественных условиях, которые в настоящем случае можно считать с избытком выполненными) непосредственно получаем, что функция, найденная таким путем, является решением уравнения (8″), дающим искомый закон движения. Таким образом, в рассмотренном случае движущаяся точка в течение конечного или бесконечного промежутка времени уходит из своего начального положения в бесконечность.

27. Предположим теперь, что попрежнему $\Phi(s_0)>0$ и $\dot{s}_0>0$, т. е. движение опять определяется уравнением (8″), но при изменении s от s_0 в направлении начальной скорости встречается такое конечное значение s_1, которое является первым корнем уравнения $\Phi(s)=0$.

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, на основании уравнения (12) будем иметь, что t при возрастании s от s_0 до s_1 тоже постоянно возрастает. Точнее, поскольку функция

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(s)}}$$

при $s=s_1$ имеет бесконечность порядка $\frac{m}{2}$, где m есть порядок нуля s_1 функции $\Phi(s)$, монотонная функция

$$t(s)=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}$$

при возрастании s от s_0 до s_1 будет стремиться к конечному значению t_1 или к бесконечности, смотря по тому, будет ли s_1 простым нулем или кратным. Но, как и в предыдущем пункте, обратная функция $s(t)$, будучи монотонной, удовлетворяет уравнению (8″) и при $t=0$ принимает значение s_0. Следовательно, $s=s(t)$ будет законом рассматриваемого движения. Таким образом, если s_1 есть простой нуль функции $\Phi(s)$, то при сделанных предположениях движущаяся точка, перемещаясь постоянно в одну сторону из положения s_0, через конечный промежуток времени придет в положение s_1; напротив, если s_1 есть кратный нуль, то движущаяся точка, перемещаясь все время в одну сторону, неограниченно приближается к положению s_1, но никогда его не достигает (*асимптотическое движение*).

28. Остается рассмотреть тот случай, когда начальная скорость равна нулю, т. е. когда начальное значение s_0 является нулем функции $\Phi(s)$. В этом случае движение в начальный момент уже не может быть описано полностью уравнением живых сил (8') (см. п. 24).

Сначала предположим, что s_0 является простым нулем функции $\Phi(s)$. В этом случае мы придем к „закону возникающего движения“ (т. I, гл. VII, п. 12), на основании которого при начальной скорости, равной нулю, первый элемент пути проходится движущейся точкой в направлении действующей активной силы, т. е. в нашем случае в направлении, определяемом знаком F_t, или на основании уравнения (9') знаком производной $\frac{d\Phi}{ds}$ при $s=s_0$, которая, по предположению, для $s=s_0$ отлична от нуля. Отсюда следует, что непосредственно вслед за этим начальным мгновением мы снова будем иметь условия, рассмотренные в двух предыдущих пунктах, т. е. материальная точка, не изменяя направления своего движения, или будет двигаться в направлении первого элемента своего пути до бесконечности, если только с этой стороны от s_0 нет нулей функции $\Phi(s)$, или в конечное время достигнет первого нуля функции $\Phi(s)$, если этот нуль простой, или, наконец, асимптотически будет стремиться к этому нулю, если он кратный.

29. Предположим, наконец, что начальное расстояние s_0 является кратным нулем функции $\Phi(s)$. Тогда для определения движения недостаточен и закон возникающего движения, так как при обращении в нуль $\frac{d\Phi}{ds}$ при $s=s_0$ обращается в нуль на основании равенства (9') также и начальная (касательная) сила $f(s_0)$. Однако в этом случае, как и во всяком другом, $s=s_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка (2')

$$m\ddot{s}=f(s),$$

к которому необходимо возвращаться всегда, когда при обращении скорости в нуль уравнение первого порядка (живых сил) становится недостаточным для определения движения.

На основании теоремы существования и единственности интеграла дифференциального уравнения второго порядка решение $s=s_0$ будет единственным решением уравнения (2'), для которого начальными условиями будут $s=s_0$ и $\dot{s}=0$. Отсюда следует, что при сделанных предположениях материальная точка остается в равновесии в начальном положении.

Сравнивая этот результат с результатом п. 27, можно сказать, что движущаяся точка не может уже во время движения проходить через такое положение, криволинейная абсцисса которого является кратным (правильным) нулем функции $\Phi(s)$: она может только стремиться к нему в асимптотическом движении, или же неограниченно долго оставаться в нем в случае, если она была там вначале.

30. Результаты пп. 26—29 позволяют выяснить, как протекает изучаемое движение, начиная с какого-нибудь начального положения.

Особого внимания заслуживает случай, когда это начальное положение находится между двумя простыми последовательными нулями s_1 и s_2 функции $\Phi(s)$, причем оно может и совпадать с одним из этих нулей. Напомним, что между этими нулями функция $\Phi(s)$ на основании условия действительности движения остается все время положительной. В таком случае, предполагая для определенности, что $s_1 < s_2$, можно представить функцию $\Phi(s)$ в виде

$$\Phi(s) = (s - s_1)(s_2 - s)\,\Phi_1(s), \tag{13}$$

где $\Phi_1(s)$ обозначает функцию, положительную во всем интервале от s_1 до s_2, включая и концы интервала. Уравнение живых сил примет вид

$$\dot{s}^2 = (s - s_1)(s_2 - s)\,\Phi_1(s). \tag{14}$$

Фиксируя в интервале от s_1 до s_2, например, в какой-нибудь внутренней точке, начальное положение s_0 материальной точки, мы тем самым определим абсолютную величину $\sqrt{(s_0 - s_1)(s_2 - s_0)\,\Phi_1(s_0)}$ начальной скорости $\dot{s}_0$, но не ее знак, который можно выбрать произвольно.

Если, например, взять знак плюс, то получим движение, все время направленное к точке s_2, причем это положение достигается движущейся точкой за конечное время (п. 27). В точке s_2 скорость обращается в нуль, и, так как s_2 есть простой нуль функции $\Phi(s)$, то отсюда движение начнется снова в направлении, указываемом знаком действующей тангенциальной силы, т. е. знаком, который в точке s_2 имеет функция $\frac{d\Phi}{ds}$. Так как на основании равенства (13)

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_2} = -(s_2 - s_1)\,\Phi_1(s_2) < 0\,,$$

то движение после достижения точки s_2 будет происходить в обратном направлении, т. е. по направлению к точке s_1. В это положение движущаяся точка придет опять за конечный промежуток времени и будет иметь в нем скорость, равную нулю. Так как s_1 есть простой нуль функции $\Phi(s)$ и так как

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_1} = (s_2 - s_1)\,\Phi_1(s_1) > 0\,,$$

то движущаяся точка, остановившись на мгновение в положении s_1, снова начнет двигаться к s_2. Следовательно, материальная точка будет неограниченно долго колебаться между положениями s_1 и s_2.

Таким образом, из рассмотрения уравнения (14) следует, что материальная точка при двух *последовательных* прохождениях через одно и то же положение s', заключенное между s_1 и s_2, будет иметь скорости, одинаковые по абсолютной величине, но с противоположными знаками. Следовательно, при третьем прохождении через s' материальная точка снова будет иметь ту же скорость (и по величине и по знаку), что и при первом прохождении.

Отсюда ясно, что рассматриваемое движение *периодично*; в самом деле, при третьем прохождении через любое положение s' скорость приобретает те же величину и направление, что и при первом прохождении, следовательно, картина движения полностью повторяется. Промежуток времени между двумя последовательными повторениями картины движения называется *периодом* колебания.

Этому интуитивному выводу можно придать строгую аналитическую форму, если применить теорему существования и единственности интеграла к уравнению (2')

$$m\ddot{s} = f(s).$$

Обозначим через t' и $t'+T$ моменты первого и третьего прохождения нашей точкой положения s' и через $\dot{s}'$ — соответствующую скорость. Координата s движущейся точки, рассматриваемая как функция от t, дает решение $s(t)$ уравнения (2'), причем при $t=t'$ эта координата принимает значение s', а ее производная становится равной $\dot{s}'$. С другой стороны, уравнение (2'), не зависящее явно от t, не изменяется при замене t на $t+\text{const}$, следовательно, функция $s(t+T)$ тоже будет интегралом уравнения (2'). Но при $t=t'$ значения этой функции и ее первой производной дают координату и скорость при третьем прохождении, совпадающие с координатой и скоростью при первом прохождении. Отсюда на основании упомянутой теоремы о единственности решения (соответствующего указанным начальным условиям) будем иметь тождество

$$s(t+T) = s(t),$$

которое как раз и выражает периодичность движения.

Таким образом, мы устанавливаем, в частности, что промежуток времени T, введенный сначала для частного положения s', не зависит от него. Кроме того, эта независимость может быть установлена аналитическим путем, если будет найдено явное выражение периода T. Действительно, из самого определения T на основании формулы (12) получим, предполагая для определенности, что вначале движение направлено от s' к s_2,

$$T = \int_{s'}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}} + \int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{-\sqrt{\Phi(s)}} + \int_{s_1}^{s'} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

или

$$T=2\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{15}$$

Это и есть период колебания.

Из тождества

$$\int_{s_2}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}=\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{-\sqrt{\Phi(s)}},$$

только что использованного для вывода формулы (15), мы видим, что всякое *полное колебание*, т. е. движение, заключенное между двумя последовательными прохождениями точки через одно из крайних положений, например через s_1, можно разбить на два *простых колебания* (первое от s_1 до s_2, второе от s_2 до s_1) равной продолжительности

$$\tau=\frac{1}{2}T=\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}.$$

Вследствие периодичности можно ограничиться изучением одного полного колебания, например колебания, начинающегося в s_1, вследствие чего второе крайнее положение s_2 будет достигнуто за полупериод τ, в то время как движущаяся точка возвратится в первый раз в s_1 по истечении целого периода $T=2\tau$. Так как замена t на $t+\text{const}$ является несущественной, то можно предположить, что прохождение через s_2 происходит в момент $t=0$, или, другими словами, что наше полное колебание совершается за интервал времени от $-\tau$ до τ.

Далее, легко видеть, что в моменты t и $-t$, равно отстоящие от $t=0$, движущаяся точка занимает одно и то же положение, но имеет равные по абсолютной величине и противоположные по знаку скорости. Это обстоятельство также непосредственно вытекает из теоремы существования и единственности интеграла, если принять во внимание, что уравнение (2′) не изменится при замене t на $-t$. Действительно, отсюда выводится, что если функция $s(t)$ есть решение уравнения (2′), принимающее при $t=0$ значение s_2, в то время как ее производная обращается в нуль, то функция $s(-t)$ также будет решением уравнения (2′), удовлетворяющим тем же начальным условиям. Отсюда получаем тождество

$$s(t)=s(-t),$$

из которого следует, что

$$\dot{s}(t)=-\dot{s}(-t).$$

В силу отмеченного свойства график функции $s=s(t)$ симметричен по отношению к оси $t=0$, если рассматривать изменение t от $t=-\tau$ до $t=\tau$, т. е. за время полного колебания.

31. В качестве непосредственного и весьма элементарного приложения предыдущей теории рассмотрим снова дифференциальное уравнение движения под действием восстанавливающей силы (п. 18)

$$\ddot{s}=-\omega^2 s \qquad \left(\omega^2=\frac{\lambda}{m}\right);$$

полагая

$$r^2=\frac{2E}{c},$$

будем иметь интеграл живой силы в виде

$$\dot{s}^2=\omega^2(r^2-s^2).$$

Отсюда следует, так как s' действительно, что движущаяся точка не может выходить из интервала, заключенного между двумя простыми нулями $\pm r$ функции, стоящей в правой части, и что речь идет о периодическом колебательном движении между этими двумя крайними положениями.

Период, не зависящий от начального положения, определяется равенством

$$T=\frac{2}{\omega}\int\limits_{-r}^{r}\frac{ds}{\sqrt{r^2-s^2}}=\left[\arcsin\frac{s}{r}\right]_{-r}^{r}=\frac{2\pi}{\omega}; \tag{16}$$

все последовательные простые колебания (от $s=-r$ до $s=r$ или обратно) будут совершаться по одному и тому же закону, если не считать изменения направления движения и смены одного промежутка времени другим. Таким образом, мы снова получаем хорошо известные свойства гармонического движения (т. I, гл. II, пп. 34—36).

32. Последнее заключительное замечание. В п. 30 мы изучали случай, когда начальное положение движущейся точки принадлежит интервалу, заключенному между двумя последовательными простыми нулями функции $\Phi(s)$, в котором эта функция остается положительной.

Из пп. 26—29 вытекает, что помимо колебательных периодических движений, которые получаются при упомянутых выше предположениях, для случая (тангенциальной) действующей силы, зависящей только от положения (в согласии с условиями, указанными в п. 24), возможны еще движения, при которых обращение направления происходит не более одного раза (соответственно одному простому нулю функции $\Phi(s)$). Эти движения допускают асимптотическую точку на конечном расстоянии (в кратном нуле) или же в бесконечности (когда движущаяся точка не встречает уже на своем пути ни одного нуля функции $\Phi(s)$).

Исследование, изложенное в этом параграфе, заимствовано из одного (теперь уже классического) мемуара Вейерштрасса[1].

§ 7. Математический маятник

33. Применим теперь общие рассуждения предыдущего параграфа к математическому маятнику. Под этим названием в механике подразумевается тяжелая материальная точка P, вынужденная оставаться на окружности, расположенной в вертикальной плоскости, и движущаяся без трения. Тангенциальная сила F_t в этом случае сводится к составляющей веса; следовательно, речь идет о силе, зависящей только от положения, поэтому можно утверждать (§ 4), что движение можно определить при помощи квадратур.

Прежде чем исследовать ход движения, выясним, при каких практических условиях оказывается возможным приблизительно выполнить предыдущие предположения. Если, например, возьмем тяжелый шарик, скользящий в трубке, согнутой в кольцо, то действие трения будет слишком значительным для того, чтобы им можно было пренебречь хотя бы в первом приближении. Дело будет обстоять лучше, если связь, удерживающая точку P, будет осуществлена в виде нити, прикрепленной одним концом к неподвижной точке O, или в виде тонкого твердого стержня, вращающегося в заданной вертикальной плоскости вокруг точки O; материальная точка P прикреплена в том и другом случае к свободному концу (нити или стержня).

Если речь идет о нити, то мы будем предполагать, что и в случае движения остается в силе допущение о натяжении, которое мы приняли в п. 36 гл. XIV т. I. Тогда, если тяжелая точка P колеблется так, что нить остается натянутой, то сила $\boldsymbol{R}$, с которой нить действует на точку P, будет всегда направлена к неподвижной точке O, и поэтому будет нормальной к траектории, что как раз и означает отсутствие трения.

Если нить заменяется твердым стержнем, то a priori можно считать, что он будет действовать на точку P не только в радиальном направлении (в сторону точки O или, что одинаково возможно, в обратную сторону), но будет также передавать точке (полностью или частично) действие сил, приложенных к самому стержню: собственного веса, сопротивления воздуха и, кроме того, трения, развивающегося в точке подвеса O.

[1]) Карл Вейерштрасс (Karl Weierstrass) родился в 1815 г. в Остенфельде (Вестфалия), умер в 1897 г. в Берлине, где был профессором университета в течение 40 лет. Он дал новый систематический метод в теории функций и, в частности, в теории эллиптических функций. Помимо того он весьма активно работал почти во всех областях анализа. Мемуар, на который делается ссылка в тексте, находится во II томе его сочинений.