в бесконечности (когда движущаяся точка не встречает уже на своем пути ни одного нуля функции $\Phi(s)$).

Исследование, изложенное в этом параграфе, заимствовано из одного (теперь уже классического) мемуара Вейерштрасса[1]).

§ 7. Математический маятник

33. Применим теперь общие рассуждения предыдущего параграфа к математическому маятнику. Под этим названием в механике подразумевается тяжелая материальная точка P, вынужденная оставаться на окружности, расположенной в вертикальной плоскости, и движущаяся без трения. Тангенциальная сила F_t в этом случае сводится к составляющей веса; следовательно, речь идет о силе, зависящей только от положения, поэтому можно утверждать (§ 4), что движение можно определить при помощи квадратур.

Прежде чем исследовать ход движения, выясним, при каких практических условиях оказывается возможным приблизительно выполнить предыдущие предположения. Если, например, возьмем тяжелый шарик, скользящий в трубке, согнутой в кольцо, то действие трения будет слишком значительным для того, чтобы им можно было пренебречь хотя бы в первом приближении. Дело будет обстоять лучше, если связь, удерживающая точку P, будет осуществлена в виде нити, прикрепленной одним концом к неподвижной точке O, или в виде тонкого твердого стержня, вращающегося в заданной вертикальной плоскости вокруг точки O; материальная точка P прикреплена в том и другом случае к свободному концу (нити или стержня).

Если речь идет о нити, то мы будем предполагать, что и в случае движения остается в силе допущение о натяжении, которое мы приняли в п. 36 гл. XIV т. I. Тогда, если тяжелая точка P колеблется так, что нить остается натянутой, то сила $\boldsymbol{R}$, с которой нить действует на точку P, будет всегда направлена к неподвижной точке O, и поэтому будет нормальной к траектории, что как раз и означает отсутствие трения.

Если нить заменяется твердым стержнем, то a priori можно считать, что он будет действовать на точку P не только в радиальном направлении (в сторону точки O или, что одинаково возможно, в обратную сторону), но будет также передавать точке (полностью или частично) действие сил, приложенных к самому стержню: собственного веса, сопротивления воздуха и, кроме того, трения, развивающегося в точке подвеса O.

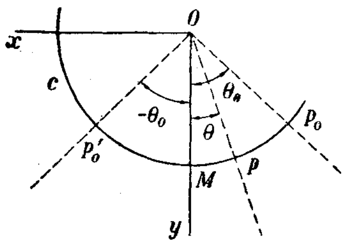
---

[1]) Карл Вейерштрасс (Karl Weierstrass) родился в 1815 г. в Остенфельде (Вестфалия), умер в 1897 г. в Берлине, где был профессором университета в течение 40 лет. Он дал новый систематический метод в теории функций и, в частности, в теории эллиптических функций. Помимо того он весьма активно работал почти во всех областях анализа. Мемуар, на который делается ссылка в тексте, находится во II томе его сочинений.

Однако трение в точке подвеса можно уменьшить путем подходящего устройства (подвес на острие); сопротивление воздуха, так же как и влияние собственного веса стержня, может быть по желанию уменьшено, если стержень взять достаточно тонким. При таких ограничениях и в этом случае оказывается возможным рассматривать связь, как связь без трения.

В дальнейшем (гл. VII, § 2) мы рассмотрим случай так называемого физического или сложного маятника, когда учитывается и вес стержня.

34. Пусть точка P движется по окружности c, расположенной в вертикальной плоскости. Будем относить точки плоскости к системе координат x, y с началом в точке подвеса O (центре окружности c) и с вертикальной осью y, направленной вниз (фиг. 6). Обозначим через l длину маятника (радиус окружности c) и через θ угол отклонения его от вертикали, т. е. угол, который радиус-вектор OP образует с вертикалью Oy. Угол θ отсчитывается в том направлении, в котором положительное вращение на прямой угол переводит положительное направление оси x в положительное направление оси y. Вследствие этого угол отклонения, соответствующий заданному положению движущейся точки P, оказывается определенным только до числа (положительного или отрицательного), кратного 2π; значение его можно уточнить, указав, сколько раз движущаяся точка описала полную окружность, считая от самого низкого положения M, прежде чем прийти в P. Если за угол θ возьмем какое-нибудь значение угла отклонения вектора $\overrightarrow{OP}$ от вертикали, то $\frac{\pi}{2}+\theta$ можно будет рассматривать как угол, который прямая OP составляет с положительным направлением оси x (угол считается положительным в направлении $x \to y$ и отрицательным в обратном направлении). Поэтому для всякой точки P окружности c будем иметь



Фиг. 6.

$$x = l\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -l\sin\theta, \quad y = l\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = l\cos\theta. \qquad (17)$$

Далее, если длину дуги s окружности c будем отсчитывать от самого низкого положения M при том же самом соглашении о выборе положительного направления отсчета углов, то будем иметь соотношение

$$s = l\theta, \qquad (18)$$

которое дает возможность принять за параметр, определяющий положение движущейся точки, вместо дуги s угол θ. Если это равенство мы продифференцируем по времени, то получим известное соотношение между линейной и угловой скоростями

$$\dot{s} = l\dot{\theta}. \tag{19}$$

Теперь, для того чтобы написать дифференциальное уравнение движения маятника, заметим, что $\theta + \frac{\pi}{2}$ есть угол, который образует с вертикалью, направленной вниз, касательная к окружности (ориентируемая в направлении возрастания s или θ). Тангенциальная составляющая веса P, если принять массу равной единице, будет равна

$$g \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -g \sin\theta.$$

Поэтому, принимая во внимание соотношение (18), мы получим дифференциальное уравнение движения маятника в виде

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta. \tag{20}$$

Это уравнение, как увидим далее, замечательно во многих отношениях; оно нам уже встречалось в указаниях, данных в т. I по поводу задачи о плоской пружине (гл. XIV, п. 74).

Здесь прежде всего следует обратить внимание на то, что уравнение (20) в силу того способа, каким оно было выведено (вспомним выражение для касательной составляющей действующей силы), действительно лишь при том условии, что на движущуюся точку наложена связь, допускающая движение только *по окружности* (двусторонняя связь). Это условие выполняется непременно, если связь, удерживающая точку P, осуществляется посредством твердого невесомого стержня (двусторонняя связь). Чтобы по возможности облегчить исследование, по крайней мере на первое время, мы разберем задачу сперва в предположении двусторонней связи.

Далее (п. 39) мы рассмотрим, учитывая реакцию связи, верны ли, и в какой мере, те заключения, к которым мы пришли, также и для маятника, подвешенного на нити (односторонняя связь).

35. Из общей теории, изложенной в пп. 12, 15, мы уже знаем, что уравнение (20) интегрируется двумя квадратурами. Первый интеграл мы получим, умножая обе части равенства (20) на $2\dot{\theta}$ и интегрируя. Этот интеграл представляет собой интеграл живых сил

$$T - U = E,$$

где U обозначает потенциал силы тяжести, отнесенный к единице массы, и определяется равенством

$$U = gy = gl\cos\theta,$$

а живая сила точки P в силу формулы (19) выразится в виде

$$T=\frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2.$$

Следовательно, интеграл живых сил будет

$$\frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2-gl\cos\theta=E, \tag{21}$$

или

$$\dot{\theta}^2=2\frac{g}{l}(\cos\theta+e),$$

где постоянная $e=\frac{E}{gl}$ определяется по начальным условиям, т. е. путем подстановки в уравнение (21) вместо θ и $\dot{\theta}$ тех значений, которые они имеют в начальный момент.

Рассматривая равенство (21), мы видим, что к исследованию определяемого им движения можно применить общие выводы предыдущего параграфа для уравнений типа (8′) с той лишь разницей, что качественные результаты, полученные там для дуги s, здесь будут относиться к углу θ.

Заметим, что условие действительности $\dot{\theta}$ влечет за собой неравенство $e\geqslant-1$.

Рассмотрим здесь последовательно два предположения: $e>1$ и $-1\leqslant e\leqslant 1$.

36. Вращательное движение. При $e>1$ картина движения исследуется легко.

Функция

$$2\frac{g}{l}(\cos\theta+e),$$

представляющая собой функцию $\Phi(s)$ общего случая, при всяком значении θ остается отличной от нуля и всегда не меньшей, чем $2\frac{g}{l}(e-1)$; поэтому при всяком возможном выборе начального значения угла θ, подчиненном условию $e>1$, функция $\theta(t)$ при бесконечном возрастании t монотонно стремится к бесконечности в произвольно выбираемом направлении, совпадающем с направлением начальной скорости. Угловая скорость будет всегда превосходить положительное значение корня

$$\sqrt{2\frac{g}{l}(e-1)}$$

или, в крайнем случае, равняться ему. В конечном счете мы будем иметь вращательное движение, совершающееся постоянно в одном и том же направлении.

Движущаяся точка неограниченное число раз проходит через каждую точку окружности (в частности, через свое начальное положение) и, как это вытекает из уравнения (21) и из периодичности функции $\cos\theta$, при каждом таком прохождении она всякий раз имеет в этой точке одну и ту же угловую, а следовательно, и линейную скорость. Теперь легко показать, что здесь мы имеем дело с *периодическим движением*. Действительно, заметим прежде всего, что если θ_0 является начальным значением отклонения движущейся точки и если для определенности предположим, что движение в начальный момент было прямым, то отклонение $\theta(t)$ точки в любом ее положении будет определено в функции от времени (отсчитываемого от момента начала движения) тем интегралом дифференциального уравнения

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta+e)}, \tag{22}$$

который однозначно определяется начальным условием

$$\theta(0)=\theta_0. \tag{23}$$

Если обозначим через T промежуток времени, по истечении которого точка, выйдя из начального положения, вновь в него возвратится, то для того же интеграла уравнения (22) будем иметь

$$\theta(T)=\theta_0+2\pi. \tag{24}$$

Функция $\theta(t+T)$, так же как и $\theta(t)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (22), как в этом легко убедиться, замечая, что это дифференциальное уравнение преобразуется само в себя при замене переменного t на $t+T$; этому же уравнению (22) вследствие периодичности косинуса удовлетворяет также функция $\Theta(t)$, определяемая равенством

$$\Theta(t)=\theta(t+T)-2\pi. \tag{25}$$

Но для этого частного интеграла уравнения (22) имеем

$$\Theta(0)=\theta(T)-2\pi,$$

или, принимая во внимание (24),

$$\Theta(0)=\theta_0.$$

Поэтому функция $\Theta(t)$, удовлетворяющая тому же начальному условию, что и $\theta(t)$, вследствие теоремы единственности интеграла совпадает с $\theta(t)$. На основании определения (25) функции $\Theta(t)$ получаем тождество

$$\theta(t+T)=\theta(t)+2\pi, \tag{26}$$

которое, в силу того, что два отличающихся на 2π угла определяют одну и ту же точку окружности, как раз и выражает то, что наше движение является периодическим с периодом T.

Аналогичное доказательство, естественно, остается в силе и в случае обратного движения; достаточно только заменить 2π на -2π в равенствах (24) и (25), а следовательно, и в тождестве (26).

37. Колебания (и, как частные случаи, состояния равновесия). Изученный выше тип прямого вращательного движения, очевидно, не выражает характерных особенностей обычных колебаний маятника.

Эти колебания определяются, как мы скоро покажем, только теми интегралами уравнения движения, для которых постоянная e больше -1 и меньше $+1$.

Но сначала рассмотрим оба исключенных случая: $e=-1$ и $e=+1$. На основании известных тригонометрических тождеств имеем

$$\cos\theta-1=-2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \cos\theta+1=2\sin^2\frac{\theta-\pi}{2};$$

отсюда видно, что функция в правой части равенства (21) для $e=-1$ или $e=+1$ имеет двойной нуль $\theta=0$ или соответственно $\theta=\pi$; кроме того, в каждом из двух случаев это будет единственным нулем нашей функции (по крайней мере, с точностью до произвольного числа, кратного 2π, не существенного для определения угла). Отсюда на основании п. 29 заключаем, что материальная точка P, предоставленная самой себе без начальной скорости ($\theta_0=0$), в самом ли нижнем положении $M(\theta_0=0)$ или в положении прямо противоположном $A(\theta_0=\pi)$, остается там сколь угодно долго.

Для полноты мы должны исследовать, возможны ли, кроме этих двух состояний равновесия, также и движения, для которых постоянная e имела бы значение ± 1 и которые мы намерены исключить. На основании уравнения (21) мы тотчас же видим, что значение $e=-1$ совместимо только с равновесием (устойчивым) в самом нижнем положении M, так как из того, что правая часть не может сделаться отрицательной (θ^2 не может быть меньше нуля), необходимо следует, что функция θ все время должна быть равна нулю. Наоборот, при $e=1$, каково бы ни было начальное значение θ_0 переменной θ (отличное от 0 и π), равенство (21) допускает решение, соответствующее действительному движению, поскольку начальная скорость на основании того же равенства (21) будет отличной от нуля. Правая часть равенства (21) при $e=1$ имеет *двойной* нуль $\theta=\pi$ в самом высшем положении A точки на окружности c (точка, прямо противоположная M). Движение точки в этом случае в согласии с общими выводами п. 27, начинаясь в положении P_0, происходит постоянно в одном и том же направлении, определяемом начальной скоростью; при неограниченном возрастании времени движущаяся точка асимптотически приближается к точке A.

Отбрасывая теперь оба предположения $e=\pm 1$, перейдем к рассмотрению тех интегралов движения, для которых имеем $-1<e<1$.

С этой целью обратимся к условиям, наиболее типичным для начала движения маятника; предположим, что материальная точка P выведена из состояния равновесия M и в некотором положении P_0, отличном от M, и от положения, прямо противоположного M, предоставлена самой себе без начальной скорости. Обозначим через θ_0 отклонение точки P_0, заключенное между $-\pi$ и π, исключая значения $\theta_0 = \pm\pi$ и значение, равное нулю.

Подставляя в уравнение (21) начальные значения

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

получим для постоянной e значение

$$e = -\cos\theta_0, \tag{27}$$

явно заключенное между -1 и $+1$. Обратно, всякий раз, когда в уравнении (21) постоянная e удовлетворяет условию $-1 < e < 1$, достаточно взять

$$\theta_0 = \arccos(-c),$$

чтобы иметь угол отклонения для того положения, исходя из которого точка P, предоставленная самой себе с начальной скоростью, равной нулю, совершает движение, определяемое уравнением (21).

Поэтому мы будем брать уравнение (21) в форме

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0); \tag{21'}$$

на основании известного тригонометрического тождества это уравнение можно написать также в виде

$$\dot{\theta}^2 = 4\frac{g}{l}\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}.$$

Отсюда следует, что функция в правой части имеет два бесконечных ряда корней: $\theta_0 + 2k\pi$ и $-\theta_0 + 2k\pi$, где k есть какое-нибудь целое число (положительное, отрицательное или равное нулю). Так как все члены каждого из этих двух рядов определяют на окружности одно и то же положение, то достаточно рассмотреть только один член каждого из этих рядов, т. е. достаточно взять, например, два корня: θ_0 и $-\theta_0$. Так как производная от синуса, т. е. косинус, при обращении синуса в нуль отлична от нуля, то каждый из двух корней θ_0 и $-\theta_0$ является простым для правой части равенства (21'), за исключением тех случаев, когда эти корни совпадают или же отличаются друг от друга на кратное 2π. Но второй случай не может иметь места, так как предполагается, что $|\theta_0| < \pi$, первый же сам собой исключается, так как это означало бы, вопреки предположению, что $\theta_0 = 0$.

Поэтому на основании п. 30 можно прямо заключить, что маятник периодически колеблется между положениями P_0 и P'_0, углы отклонения которых равны соответственно θ_0 и $-\theta_0$. Каждое полное колебание (от P_0 до P_0' и обратно) можно разбить на два простых колебания равной продолжительности. Простые колебания совершаются таким образом, что маятник при простом колебании от P_0 до P_0' и при следующем простом колебании от P_0' до P_0 проходит через одно и то же положение P в два мгновения, одно из которых предшествует, а другое следует за тем мгновением, когда маятник достигает крайнего положения P_0', по истечении одного и того же промежутка времени.

Но здесь мы уже можем сказать несколько больше. Прежде всего всякое простое колебание, например от P_0 до P_0', в свою очередь можно разбить на два полуколебания равной продолжительности: одно от P_0 до самой нижней точки M, другое от M до P_0'. Действительно, предположим, что $\theta_0 > 0$ (т. е. заключено между 0 и π); это значит, что простое колебание является обратным и поэтому описывается уравнением

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}. \tag{22'}$$

Продолжительности двух полуколебаний от P_0 до M и от M до P_0' будут даны двумя определенными интегралами

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}},\\ -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_{0}^{-\theta_0}&\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

которые, очевидно, будут тождественными, если во втором из них заменить θ на $-\theta$. Далее, маятник будет отклоняться на равные по абсолютной величине (но противоположные по знаку) углы, или, другими словами, будет занимать два положения, симметричные относительно вертикали, проходящей через наиболее низкую точку M, по истечении одинаковых промежутков времени после прохождения через M. Действительно, будем отсчитывать время от начала любого простого колебания. Пусть прохождение маятника через M произойдет в момент времени τ_1; тогда, давая общее значение обоим интегралам (28), положим $t = \tau_1 + t^*$, т. е. обозначим через t^* время, отсчитываемое от момента прохождения через M. После этого все сведется к доказательству тождества

$$\theta(\tau_1 + t^*) = -\theta(\tau_1 - t^*). \tag{29}$$

Для доказательства достаточно заметить, что уравнение второго порядка (20) останется неизменным как при замене θ на $-\theta$, так и при замене t на $\pm t + \text{const}$; так что, если одна из двух частей равенства (29) будет интегралом уравнения (20), то и другая часть будет также его интегралом. А так как при $t^* = 0$ обе эти части совпадают вместе с их производными, то на основании теоремы о единственности интеграла мы заключаем, что они тождественны. В самом деле, обе части равенства (29) обращаются в нуль при $t^* = 0$; дифференцируя обе части равенства и полагая затем $t^* = 0$, мы найдем, что и производные тождественны.

38. Вычисление периода. Период T колебаний маятника равен двойной продолжительности τ простого колебания, которое в свою очередь на основании сказанного выше равно двойной продолжительности τ_1 полуколебания. Поэтому имеем

$$\frac{T}{2} = \tau = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Прежде всего покажем, как этот интеграл приводится к *эллиптическому*.

Для доказательства сделаем замену переменного, определяемую равенством

$$\sin\frac{\theta}{2} = u \sin\frac{\theta_0}{2},$$

где u — новая переменная, и примем во внимание следующее соотношение

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\,du$$

и тождества

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}},$$

где корень берется в арифметическом смысле.

Заметим, что при изменении θ от 0 до θ_0 переменная u изменяется, всегда возрастая, от 0 до 1. Для продолжительности τ одного простого колебания мы получим выражение в виде эллиптического интеграла (первого рода)

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{30}$$

где для простоты записи положено $\sin\frac{\theta_0}{2} = k$.

Такой интеграл нельзя вычислить посредством элементарных трансцендентных функций. Он выражается только в виде ряда. Чтобы получить быстро сходящийся, а поэтому и удобный для вычисления ряд, можно поступить следующим образом.

Так как во всем промежутке интеграции имеем $k^2u^2<1$, то функцию

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}}=(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

можно разложить в сходящийся ряд по формуле бинома, в силу чего получим

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}k^2u^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4u^4+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}k^{2n}u^{2n}+\ldots,$$

или, в более сжатой форме,

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nk^{2n}u^{2n},$$

где положено

$$c_0=1,\quad c_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\qquad (n>0). \tag{31}$$

Подставим это в выражение (30) для τ и проинтегрируем полученный ряд почленно (это возможно, так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nk^{2n}u^{2n}$, как это вытекает из сравнения с рядом с постоянными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nk^{2n}$, является равномерно сходящимся во всем промежутке интеграции). Это дает выражение для τ:

$$\tau=2\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}c_nk^{2n}\int_0^1\frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}},$$

которое, если принять во внимание известное соотношение

$$\int_0^1\frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}}=c_n\frac{\pi}{2},$$

упрощается и принимает вид

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2k^{2n}.$$

Если напишем его в развернутом виде и вместо k подставим его значение $\sin\frac{\theta_0}{2}$, то получим искомое разложение

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right\}. \quad (32)$$

Если начальный угол отклонения θ_0 является малым, то с известным приближением можно ограничиться только двумя первыми членами, что дает

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (32')$$

Если можно пренебречь и членами второго порядка, то получим хорошо известную элементарную формулу

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (32'')$$

39. Реакция связи. Так как активная сила сводится к весу, то реакция выразится формулой (п. 7).

$$R_n = \frac{v^2}{r} - g\cos\alpha,$$

где величина R_n может быть истолкована также как составляющая по внешней нормали (в нашем случае радиальная) центробежной силы, действующей на стержень маятника (гл. I, § 3, п. 6), а величины r и α соответственно будут радиусом кривизны и углом наклона нормали, направленной в сторону вогнутости, к вертикали, направленной вниз. Ясно, что для маятника имеем $r=l$, $\cos\alpha = -\cos\theta$, так что сила, действующая на стержень, выразится в виде

$$\frac{v^2}{l} + g\cos\theta.$$

Эту силу можно представить в зависимости только от угла θ, если обратиться к интегралу живых сил, который мы возьмем в его общей форме (21).

Действительно, так как в силу (19) $\frac{v^2}{l} = l\dot{\theta}^2$, то, принимая во внимание (21), получим

$$R_n = 3g\left(\cos\theta + \frac{2}{3}e\right). \quad (33)$$

Если, как предполагалось до сих пор, связь осуществляется посредством твердого стержня и поэтому является двусторонней, то характер движения, изученного нами для различных возможных случаев, не будет нарушаться тем, что R_n исчезает или переходит от положительных значений к отрицательным. Пока $R_n > 0$, стержень противодействует растягиванию, и, наоборот, он противодействует сжатию, если $R_n < 0$.

Так, например, на основании формулы (33) легко проверить, как это, впрочем, и непосредственно ясно, что в обоих рассмотренных в п. 36 случаях равновесия мы будем иметь растяжение или сжатие, смотря по тому, будет ли масса маятника занимать самое низкое положение M или положение прямо противоположное.

Но если связь осуществляется посредством нити (односторонняя связь), то необходимо учитывать и знак у R_n, так как движение маятника в различных возможных случаях будет происходить так, как указано в предыдущих пунктах, только при условии, что связь проявляет свое действие, т. е. если постоянно $R_n > 0$.

Чтобы лучше уяснить дело, посмотрим, для каких значений постоянной e (которая, как мы знаем, всегда $\geqslant -1$) выражение для R_n (33) может стать отрицательным. Из того же равенства (33) следует, что R_n будет положительным, если $e > \frac{3}{2}$; с другой стороны, достаточно написать выражение (33) в виде

$$R_n = 3g(\cos\theta + e) - eg$$

и заметить, что на основании уравнения (21) $(\cos\theta + e)$ всегда больше нуля, чтобы убедиться, что R_n обязательно будет положительным всякий раз, когда $e < 0$.

Следовательно, случаи, когда выражение для R_n может стать отрицательным, вследствие чего движение маятника, подвешенного на нити, будет требовать дальнейшего исследования, соответствуют значениям e, заключенным в двух промежутках: от 0 до 1 и от 1 до $^3/_2$. Если бы связь была двусторонней, то речь шла бы соответственно о колебательном движении, в котором, как это следует из равенства (27), маятник опускается без начальной скорости из самого высокого положения над центром подвеса O, или же о достаточно медленном вращательном движении (точнее, о таком движении, у которого минимальная угловая скорость (п. 36) не превышает $\sqrt{\frac{g}{l}}$; при $e = 1$ мы имели бы асимптотическое движение к наивысшей точке круговой траектории C.

Предположим, что подвес осуществлен посредством нити, и рассмотрим сначала колебательное движение. Случай $e = 0$ соответствует колебательному движению, которое можно осуществить, если отпустить маятник с натянутой нитью и без начальной скорости из какого-либо из двух положений, находящихся на одинаковой высоте с центром подвеса. В этом случае можно только сказать, что R_n остается положительной в течение всего колебания и исчезает в крайних его точках. Фиксируем теперь значение e, заключенное между 0 и 1 (исключая крайние значения), и попытаемся определить соответствующее колебательное движение. Для этого приведем маятник в движение из самого низкого положения M ($\theta = 0$) в том или другом направлении с такой угловой скоростью, которая необходима в силу уравнения (21) для рассматриваемого движения. Сначала все будет происходить так, как если бы подвес был осуществлен посредством твердого стержня. Но реакция R_n, которая на основании соотношения (33) положительна в начале (т. е. для значений θ, достаточно близких к 0), при возрастании абсолютного значения θ будет уменьшаться и в некотором положении исчезнет. Это положение в силу равенства (33), конечно, выше точки подвеса $O\left(\theta > \frac{\pi}{2}\right.$ или $\left.\theta < -\frac{\pi}{2}\right)$ и во всяком случае, как это следует из сравнения формулы (33) с уравнением (21), предшествует тому, в котором $\dot{\theta}$ обращается в нуль и которое, в случае двусторонней связи, представляло бы крайнюю точку колебания.

Аналогичные обстоятельства представятся при $1 \leqslant e \leqslant {}^3/_2$, т. е. в случаях вращательного движения и асимптотического движения к наивысшей точке окружности c.

Следовательно, при том и другом предположении найдется такое мгновение t_1, когда R_n исчезает и притом так, что если бы связь была осуществлена в виде стержня, то R_n сделалась бы затем отрицательной, и движение продолжалось бы и после этого мгновения и представило бы один из случаев, рассмотренных в предыдущих пунктах. Легко видеть, что произойдет в наших условиях. В положении P_1, соответствующем моменту t_1 (и, конечно, находящемся выше точки O), масса маятника покинет окружность c, и движение (по крайней мере на некоторое время, т. е. до тех пор, пока не будет натянута нить) будет происходить свободно под действием силы тяжести, как если бы нити не было.

Естественно, что обе фазы движения в точке P_1 полностью совпадают не только в отношении скорости, но также и в отношении ускорения. Это происходит потому, что (в движении по окружности) в момент t_1 реакция $R_n = 0$, маятнику не противодействует уже никакая реакция связи, и равнодействующая всех сил в этот момент сводится только к весу, как и в последующем затем свободном движении.

Совпадение скоростей влечет за собой совпадение касательных к обеим дугам траекторий в точке P_1 (к окружности и к параболе). Далее, из совпадения ускорений следует, что радиус кривизны параболы в точке P_1 равен радиусу l окружности c. Достаточно заметить, что при совпадении нормалей и равенстве нормальных ускорений v^2/r радиусы кривизны траекторий должны быть одинаковыми, если скорости равны.

40. Случай малых колебаний. Если предположить, что отклонения θ маятника от вертикали малы, таковы, например, что можно пренебречь величиной θ^2 по сравнению с единицей, то вместо синуса можно взять дугу (как в этом можно убедиться, если функцию $\sin\theta$ разложить в ряд Маклорена).

Если ограничиться этим порядком приближения, то дифференциальное уравнение (20) можно заменить линейным уравнением

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta.$$

В правой части этого уравнения мы видим типичное выражение (п. 18) для упругой восстанавливающей силы; таким образом, мы пришли к гармоническому колебательному движению точки по окружности c.

Постоянная ω^2, которая характерна для уравнения гармонических колебаний, заменяется здесь отношением g/l. Период колебания $T = 2\pi/\omega$ в этом случае равен $2\pi\sqrt{l/g}$. Полупериод (продолжительность одного простого колебания) определяется из равенства

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

как мы уже нашли (п. 38) из точного выражения для τ в предположении (по существу равносильном настоящему), что можно пренебречь величиной $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ по сравнению с единицей.

41. Влияние вязкого сопротивления. Для того чтобы учесть пассивное сопротивление, пропорциональное скорости вида $-b\dot{s}$ (п. 21), очевидно, достаточно прибавить к правой части уравнения (20) член, пропорциональный $\dot{\theta}$, с отрицательным коэффициентом пропорциональности. Обозначая этот коэффициент через $-2h$, получим

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - 2h\dot{\theta}.$$

Если ограничиться, как выше, колебаниями с малой амплитудой, то уравнение упростится, и мы получим

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - 2h\dot{\theta}.$$

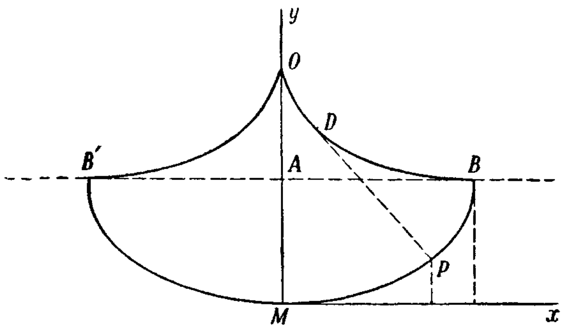
Оно снова приводится к уравнению вида $\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0$ (где h и k — положительные постоянные), изученному в пп. 41—43, гл. II, т. I. При $k > h^2$ будем иметь затухающие колебания.

В случае маятника, если речь идет о вязком сопротивлении воздуха, порядок величин $k = \sqrt{g/l}$ и h таков, что выполняется неравенство $k > h^2$. Для этого достаточно, введя линейную скорость $l\dot{\theta}$, представить коэффициент вязкого сопротивления b в виде $2h/l$ и приравнять (п. 21) $6\pi\mu r$, где r — радиус сферы, внутри которой заключена масса маятника, а $\mu = 0{,}000189$. Если для примера принять $l=1$ *м* $=100$ *см*, $r=1$ *см*, то мы немедленно получим, что $k=9{,}8$ будет больше h^2, так как

$$h^2=\left(6\pi r\frac{l}{2}0{,}000189\right)^2=(0{,}178)^2.$$

Итак, сопротивление (вязкое) воздуха отразится на движении в том, что малые колебания маятника будут затухать по показательному закону, рассмотренному в кинематике.

42. Изохронизм (таутохронность) циклоидального движения. Из соображений, развитых в п. 38 о продолжительности колебаний математического маятника, вытекает один вопрос, который в силу исторического интереса заслуживает особого внимания.



Фиг. 7.

Мы видели, что продолжительность колебания τ маятника (кругового), вообще говоря, зависит от начального угла наклона θ_0 (см. формулы (32) или (32′)); только для малых значений θ_0 она оказывается приблизительно постоянной (и равной $\pi\sqrt{l/g}$). То же относится и к времени падения (из начального положения до самой низкой точки M), которое равно $\tau/2$.

Еще Гюйгенс поставил вопрос о замене, если это возможно, окружности другой кривой, тоже расположенной в вертикальной плоскости и строго *изохронной*, т. е. такой, чтобы время падения тяжелой точки, вынужденной двигаться по кривой без трения, действительно стало независимым от начального положения. Он нашел, что этим свойством обладает циклоида (с горизонтальным основанием и с вогнутостью, обращенной вверх).

Вывод Гюйгенса можно получить из рассмотрения уравнения движения, которое мы легко найдем, вспоминая одно свойство циклоиды, уже рассмотренное нами в первом томе.

Пусть $B'B$ (фиг. 7) есть основание циклоиды, A — середина основания, a — радиус образующего круга, M — самая нижняя точка циклоиды, находящаяся на вертикали, проходящей через точку A, на расстоянии $2a$ от A. Начало координат возьмем в точке M и ось My направим по вертикали вверх; тогда ось Mx будет горизонтальной и касательной к циклоиде. Если условимся отсчитывать дуги s от самой низкой точки, считая их положительными в одном направлении (например, в направлении к B) и отрицательными в противоположном, то между s и y для любой точки P будет существовать соотношение (т. I, гл. V, п. 43)

$$s^2 = 8ay,$$

которое как раз и позволяет обнаружить интересующее нас свойство. Действительно, отсюда следует

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{4a};$$

так как $\frac{dy}{ds}$ есть косинус угла, который образует вертикаль, направленная вверх (т. е. ось My), с касательной в точке P (направленной в сторону возрастания s), то для тангенциальной составляющей F_t веса (материальной точки с массой, равной 1) в положении P мы находим выражение

$$F_t = -\frac{g}{4a}s;$$

поэтому уравнение движения принимает вид

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s. \tag{34}$$

Напомним еще раз, что это уравнение является характерным для того гармонического колебательного движения, частота которого определяется равенством

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Период такого движения, как мы знаем, не зависит от начальных условий и равен

$$\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Полупериод $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ представляет собой продолжительность любого простого колебания, а половина его $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ выражает время, необходимое для того, чтобы маятник достиг наиболее низкой точки $M(s=0)$, исходя из некоторого крайнего положения (которое может быть любой точкой циклоиды).

Таким образом изохронизм циклоиды доказан как в отношении времени падения, так (если рассматривать движение в целом) и в отношении колебаний маятника в ту и другую сторону от M.

43. Для физического осуществления связи Гюйгенс придумал простой прибор, называемый *циклоидальным маятником*. Устройство его опирается на другое геометрическое свойство циклоиды:

Эволютой всякой циклоиды служит равная ей циклоида, основание которой смещено на $2a$ (в сторону вогнутости) и сдвинуто по фазе на полупериод, т. е. точки заострения ее соответствуют вершинам M, а вершины совпадают с точками заострения B', B, ... (см. фиг. 7).

Обозначим через O точку заострения интересующей нас ветви, расположенную над точкой M, и представим себе две дуги эволюты (OB' и OB), реализованные посредством выпуклых профилей.

Далее, если в точке O укрепить нить длиной $4a$, несущую на конце груз P, то этот груз при качании будет вынужден описывать циклоиду $B'MB$. Достаточно заметить, что когда маятник будет удаляться от вертикали, нить вынуждена будет огибать дугу эволюты OD, сходя с нее затем по касательной, так что сумма дуги $\widehat{OD}$ и отрезка касательной DP будет постоянной и равной $4a$. В силу характеристического свойства эволюты геометрическим местом точек P будет циклоида эвольвента.

Заметим, что этот вид маятника не представляет практического интереса, потому что трение, встречаемое нитью на выпуклом профиле циклоиды, имеет заметное влияние и его нельзя устранить, как это было бы необходимо, чтобы движение действительно совершалось по закону, вытекающему из уравнения (34).

44. Отметим еще без доказательства, что циклоида не только изохронна; она является еще и брахистохроной относительно силы тяжести.

Это значит, что если заданы две какие угодно точки A и B с различными высотами (пусть, например, B выше A), то из всех дуг различных кривых, соединяющих эти точки, дуга циклоиды обладает тем свойством, что тяжелая точка, выходящая из B без начальной скорости и вынужденная оставаться на кривой, проходит эту дугу в кратчайшее время. Эта циклоида имеет горизонтальное основание, точку заострения в B и проходит через A. В частном случае, если B и A расположены на одной и той же вертикали, дуга циклоиды вырождается в отрезок AB.