§ 8. Трение во время движения. Шероховатая наклонная плоскость

45. Обратимся теперь к вопросу о том, как ведет себя реакция связи в условиях движения.

В статике (гл. IX, т. I) мы видели, что когда материальная точка, опирающаяся на какую-нибудь поверхность или кривую, находится в равновесии, трение (касательная реакция, развиваемая опорой) по абсолютной величине не превосходит некоторой части f нормальной реакции. Направление, в котором действует эта касательная сила, зависит от активной силы; более точно, так как трение уравновешивает касательную составляющую активной силы, то мы можем сказать, что направление статического трения противоположно направлению проекции силы.

Если при шероховатой опоре происходит какое-либо движение под действием активной силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к движущейся точке, то опора также будет действовать на точку с некоторой силой $\boldsymbol{R}$ — реакцией опоры.

Чтобы определить, какому закону подчиняется действие этой реакции, необходимо обратиться к опыту. Интуиция прежде всего подсказывает, что, как и в статическом случае, опора способна действовать только во внешнюю сторону по отношению к реализующему ее телу.

Обозначим теперь через N абсолютную величину нормальной составляющей реакции опоры $\boldsymbol{R}$ и через $\boldsymbol{A}$ — ее касательную составляющую.

Эта последняя называется *трением* с присоединением определения *динамическое* или *во время движения*, если желательно отметить, что скорость движущейся точки отлична от нуля.

Опыты, производившиеся почти одновременно Кулоном и Мореном, привели последнего (около 1830 г.) к формулировке следующих законов:

1°. Направление динамического трения прямо противоположно направлению движения или, что все равно, скорости. Если случится, что скорость во время движения исчезнет, то остаются в силе законы статического трения. Следовательно, движение оканчивается или начинается снова, в зависимости от того, удовлетворяет или не удовлетворяет активная сила $\boldsymbol{F}$ условиям равновесия. Если опорой является поверхность, то можно также сказать, что движение оканчивается или начинается снова в зависимости от того, будет ли линия действия силы $\boldsymbol{F}$ проходить внутри или вне конуса трения, относящегося к положению равновесия.

То же выражение можно употребить, если опорой служит кривая (заменив лишь слово *„внутри“* словом *„вне“*) (см. гл. IX, т. I).

2°. Величина динамической силы трения A прямо пропорциональна величине нормальной реакции N. Коэффициент пропорциональности есть правильная дробь, не зависящая ни от скорости движущейся точки, ни от размеров соприкасающихся поверхностей, и зависит только от их материальной природы.

Этот коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом трения* (*динамического* или *трения при движении*) и обозначается также буквой f, введенной уже для обозначения статического трения. Такое обозначение введено не без оснований, так как, по крайней мере в очень грубом приближении, оба коэффициента трения, статический и динамический, совпадают.

В этом порядке приближения поведение реакции $\boldsymbol{R}$ можно представить в следующей отчетливой форме.

Реакция, развиваемая шероховатой опорой (которая в статическом случае ограничивается лишь тем, что она не должна выходить из конуса трения) *в динамических условиях, будет находиться именно на конической поверхности* и на той образующей, которая проектируется (ортогонально) на касательную к траектории в направлении, обратном движению.

Из всего этого интуитивным путем можно сделать вывод, что трение во всяком случае (как в условиях равновесия, так и в условиях движения) можно рассматривать как пассивное сопротивление, способное достигать известного максимума (определенной дроби от N). Оно проявляется в том, что препятствует началу движения при значениях (не превышающих максимума), уравновешивающих активную силу, и достигает максимума (в направлении прямо противоположном движению), когда скорость отлична от нуля.

В действительности явление не вполне соответствует этой схеме. Коэффициент динамического трения всегда несколько (а иногда даже значительно) меньше коэффициента статического трения. Кроме того, он остается приблизительно постоянным до тех пор, пока речь идет о малых скоростях (не превышающих 4 или 5 *м/сек*) и не слишком больших давлениях, затем медленно уменьшается при возрастании скорости и при увеличении давления.

В частности, это подтверждается на примере железнодорожных тормозов (чугунные колодки против стальных ободов), где поэтому можно думать, что речь идет не о сухом соприкосновении: в этом случае играет роль воздух, действующий почти как смазка[1]). Здесь невозможно углублять этот важный вопрос, заметим только, что когда между поверхностями движущегося тела и опоры помещается смазка,

[1]) Новейшие опыты, производимые в лабораториях очень тонкими методами, позволяют установить непредвиденный факт, что большая отполированность соприкасающихся поверхностей глубоко изменяет законы трения. По этому вопросу, а также о случае, технически более важном, когда употребляется смазка, см.: A. Sommerfeld, Zur Theorie der Schmiermittelreibung, *Zeitschrift für technische Physik*, 1921, стр. 59—93. [(См. также „Гидродинамическая теория смазки", сборник статей из серии „Классики естествознания", 1934. (*Прим. ред.*)]

коэффициент трения существенным образом (и пока еще не вполне выясненным) зависит от скорости v, от нормального давления N и от коэффициента вязкости μ смазки; можно принять, что коэффициент трения зависит только от произведения $(\mu v N^{-1})$.

46. Принцип независимости действия связей от способа, каким они осуществляются, уже использованный в статике (т. I, гл. IX, п. 12), с успехом может быть введен и в динамику. Так, например, при трении во время движения предполагается, что всякий раз, когда материальная точка подходящими приспособлениями удерживается на определенной кривой или поверхности, она будет вести себя так, как если бы она опиралась на материальную поверхность.

Следствия из этого предположения находятся в достаточном согласии с наблюдаемыми фактами.

47. На основании предыдущих общих рассуждений мы можем тотчас же составить уравнение, согласно которому совершается движение точки по заданной траектории, если известна активная сила $\boldsymbol{F}$ и коэффициент трения f.

Для этого, очевидно, достаточно спроектировать на направление касательной $\boldsymbol{t}$ уравнение (1')

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$$

и принять во внимание (п. 45), что $R_t = \pm A = \pm fN$, где знак выбирается в согласии с тем, что сила будет всегда сопротивлением; поэтому необходимо взять знак минус, когда (относительно направления $\boldsymbol{t}$) движение является прямым, т. е. когда $\dot{s} > 0$, и знак плюс, когда $\dot{s} < 0$.

Из этого замечания о двойном знаке следует:

$$\begin{aligned} &(а) \qquad m\ddot{s} = F_t - fN \quad \text{при } \dot{s} > 0, \\ &(б) \qquad m\ddot{s} = F_t + fN \quad \text{при } \dot{s} < 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Остается выразить N (абсолютное значение нормальной реакции), для чего необходимо еще раз вернуться к основному уравнению (1'), спроектировав его на два другие главные направления (главную нормаль $\boldsymbol{n}$ и бинормаль $\boldsymbol{b}$). Что касается проекции на главную нормаль, то на основании формулы (3) имеем

$$R_n = m\frac{v^2}{r} - F_n;$$

так как для бинормали соответствующая составляющая ускорения $\boldsymbol{a}$ равна нулю, то

$$R_b = -F_b.$$

Если теперь заметим, что нормальная реакция в силу своего определения представляет собой проекцию полной реакции $\boldsymbol{R}$ на нормальную плоскость, т. е. вектор в этой плоскости с составляющими R_n и R_b, то, очевидно, получим

$$N=\sqrt{R_n^2+R_b^2}=\sqrt{\left\{m\frac{v^2}{r}-F_n\right\}^2+F_b^2},$$

где радикал берется по абсолютной величине.

Это и будет искомым выражением N, которое справедливо в самом общем случае. Как мы видим, оно зависит от нормальных составляющих *активной* силы F_n и F_b, от скорости v движущейся точки (или от $\dot{s}$) и от радиуса кривизны r траектории в любом положении (или же от s).

Наконец, если, как мы предполагаем, закон действия силы известен и F_n и F_b являются известными функциями от s, $\dot{s}$, t, то то же можно будет сказать и об N.

Мы ограничимся случаем, когда активная сила $\boldsymbol{F}$ лежит в соприкасающейся плоскости. Тогда $F_b=0$, и выражение для N упрощается

$$N=\left|m\frac{v^2}{r}-F_n\right|.$$

Таким образом для реакции трения имеем

$$R_t=\mp fN=\mp f\left|m\frac{v^2}{r}-F_n\right|,$$

где верхний или нижний знак берется всегда в зависимости от того, будет ли значение $\dot{s}$ положительным или отрицательным.

В форме, отличной от этой, но по существу эквивалентной, можно написать

$$R_t=\begin{cases} f\left(F_n-m\dfrac{v^2}{r}\right) & \text{всякий раз, когда } \left(m\dfrac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}>0,\\ -f\left(F_n-m\dfrac{v^2}{r}\right) & \text{всякий раз, когда } \left(m\dfrac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}<0.\end{cases}$$

Действительно, когда произведение $\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}$ положительно, то множители $\dot{s}$ и $m\frac{v^2}{r}-F_n$ будут оба положительными или оба отрицательными. В первом случае $N=m\frac{v^2}{r}-F_n$, $R_t=-fN$, во втором $N=-\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)$, $R_t=fN$, откуда получается в том или другом случае верхнее выражение для R_t. Аналогично проверяется и тот случай, когда произведение $\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}$ отрицательно, тогда для R_t будем иметь нижнее выражение. Если бы указанное произведение было равно нулю, то из обоих выражений мы имели бы $R_t=0$, так как речь идет о динамическом трении, где существенно предположение, что $\dot{s}$ отлично от нуля; поэтому рассматриваемый случай может представиться только тогда, когда исчезает первый множитель $m\frac{v^2}{r}-F_n$.

Уравнение (35) равносильно уравнению

$$m\ddot{s}=F_t\pm f\left(F_n-m\frac{v^2}{r}\right), \qquad (35')$$

где знак выбирается согласно только что указанному критерию.

Если заметим, что F_t и F_n даже в более общих условиях должны рассматриваться как известные функции от s, $\dot{s}$ и t, а f (коэффициент трения) и r (радиус кривизны) являются также известными функциями положения движущейся точки, т. е. функциями s, и, с другой стороны, $v^2=\dot{s}^2$, то увидим, что уравнение (35′) действительно является дифференциальным уравнением второго порядка только с одной неизвестной функцией $s(t)$.

48. Если сила $\boldsymbol{F}$ позиционная, то F_t и F_n будут зависеть исключительно от s, и правая часть уравнения (35′) представится в виде

$$A(s)v^2+B(s),$$

где $A(s)$ и $B(s)$ означают соответственно $-f\frac{m}{r}$, F_t+fF_n или $f\frac{m}{r}$, F_t-fF_n, в зависимости от того, какой берется знак. Из выражения $\pm f\frac{m}{r}$ для $A(s)$ следует, что, если речь идет о шероховатой опоре (для которой надо предположить $f>0$), то эта функция может исчезать только в случае прямолинейной траектории (бесконечно большой радиус кривизны). В этом случае (который мы рассмотрим в следующем параграфе) правая часть равенства (35′) сведется к функции только от s; следовательно, в отношении интегрирования мы приходим здесь к случаю, подробно разобранному выше (§ 4).

Но и в общем случае, какова бы ни была функция $A(s)$, порядок уравнения (35′) можно понизить до первого и тем самым свести уравнение к типу, непосредственно интегрируемому в квадратурах.

Достаточно принять за неизвестную функцию v^2 вместо s, а за независимую переменную s вместо t. Действительно, имеем тождественно

$$\ddot{s}=\frac{d\dot{s}}{dt}=\frac{d\dot{s}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d\dot{s}}{ds}\dot{s}=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds},$$

и уравнение (35′) принимает вид

$$\frac{1}{2}m\frac{dv^2}{ds}=A(s)v^2+B(s),$$

т. е. становится линейным дифференциальным уравнением по отношению к v^2, если рассматривать v^2 как функцию от s. Интегрирование его, требующее, вообще говоря, двух квадратур, приводит к выражению v^2 в функции от s. Таким образом, скорость движущейся точки будет функцией занимаемого ею положения. Чтобы полностью определить движение, надо выразить положение точки в зависимости от времени, указав соотношение между s и t. Эта зависимость получится в результате новой квадратуры, если заметим, что выражение скорости в функции от s равносильно формуле вида

$$\frac{ds}{dt} = \text{известной функции от } s.$$

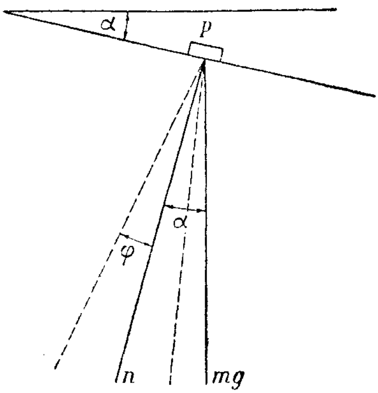
Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь t в функции от s, откуда, обратно, мы выразим также и s в функции от t. Следовательно, задача полностью разрешима в квадратурах.

49. Остается еще учесть влияние двойного знака в правой части уравнения (35′) или в правой части первоначального уравнения (35) (которое в этом исследовании удобнее, чем уравнение (35′)). Как уже отмечалось в п. 47, движение определяется уравнением (35) (а) в том промежутке времени, в котором оно остается прямым ($\dot{s} > 0$), и уравнением (35) (б) в промежутке времени, когда оно оказывается обратным ($\dot{s} < 0$). Поэтому, при непрерывности $\dot{s}$, случай, когда мы должны будем заменить для определения движения одно уравнение другим, может представиться только в момент t_1 остановки ($\dot{s} = 0$). На этот момент надо обратить особое внимание, так как он может означать конец движения. По законам динамического трения (п. 45) это может произойти только тогда, когда в момент остановки t_1 будет выполняться условие статического равновесия $|F_t| \leqslant fN$ (где f обозначает коэффициент статического трения). В противном случае тотчас же за моментом t_1 движение начнется снова. Более точно, в силу закона возникающего движения движущаяся точка направится в ту сторону, в которую в момент t_1 направлена касательная сила F_t, так что в новой фазе движение будет определяться равенством (35) (а) или равенством (35) (б), смотря по тому, будет ли в момент $t = t_1$ сила $F_t > 0$ или < 0. Таким образом, закон движения, начиная от положения $s = s_1$ (и с момента $t = t_1$), будет однозначно определен тем интегралом уравнения (35) (а) или соответственно (35) (б), которое характеризуется начальными условиями

$$s = s_1, \quad \dot{s} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1.$$

Этот интеграл будет представлять движение неопределенно долго, если $\dot{s}$ сохраняет свой знак; в противном же случае — до первого следующего момента t_2, когда $\dot{s}$ снова обратится в нуль. В последнем случае необходимо проверить, как и в момент t_1, не окончилось ли движение, и, если этого нет, определить, принимая во внимание, в какую сторону действует касательная сила, какое из двух уравнений вступает в силу, и т. д.

50. Шероховатая наклонная плоскость. Изложенную выше теорию можно непосредственно приложить к движению тяжелого тела по шероховатой наклонной плоскости в предположении, что начальная скорость равна нулю или направлена по прямой наибольшего наклона. Вследствие очевидной симметрии движение будет происходить вдоль этой прямой наибольшего наклона.



Фиг. 8.

Обозначим через α угол наклона плоскости и через φ угол трения (статического) (фиг. 8). Можно утверждать, что если в какой-нибудь момент скорость равна нулю, то тяжелое тело или останется неподвижным, или начнет опускаться, смотря по тому, будет ли $\alpha \leqslant \varphi$ или $> \varphi$. Далее, если s будем отсчитывать по направлению вниз (исходя, например, от начального положения), то

$$F_t = mg \sin\alpha, \quad N = mg\cos\alpha.$$

Если предположим для определенности, что коэффициент динамического трения остается постоянным и совпадает с коэффициентом статического трения, то будем иметь $f = \operatorname{tg}\varphi$, и сила $F_t \mp fN$ в обоих случаях будет постоянной.

Полагая для краткости

$$g_1 = \frac{g}{\cos\varphi}\sin(\alpha - \varphi), \quad g_2 = \frac{g}{\cos\varphi}\sin(\alpha + \varphi),$$

на основании равенств (35) (а) и (35) (б) соответственно будем иметь

$$\ddot{s} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha = g_1,$$
$$\ddot{s} = g\sin\alpha + fg\cos\alpha = g_2;$$

первое из этих уравнений остается в силе, когда тело опускается ($\dot{s} > 0$), второе — когда оно поднимается. Постоянная g_2 всегда положительна, поэтому из тождества

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\ddot{s}\dot{s}$$

вытекает, что в течение восходящего движения ($\ddot{s} = g_2$, $\dot{s} < 0$) абсолютная величина скорости, как это и следовало ожидать, будет постоянно уменьшаться; при постоянном ускорении g_2 движение будет равнозамедленным.

Аналогично убедимся, что нисходящее движение, уравнение которого имеет вид $\ddot{s}=g_1$, будет равнозамедленным или равноускоренным (включая и предельный случай, когда ускорение равно нулю) в зависимости от того, будет ли g_1 отрицательным или нет, т. е. в зависимости от того, будет ли φ больше или меньше α. Это зависит исключительно от физической природы опоры.

51. Остановимся, например, на случае, когда угол наклона больше угла трения ($\alpha>\varphi$) (фиг. 8). Представим себе, что телу был дан начальный толчок, направленный вверх, со скоростью v_0 (по абсолютной величине).

При $t=0$ будем иметь $s=0$, $\dot{s}=-v_0$; движение вначале будет восходящим и поэтому представится тем интегралом уравнения $\ddot{s}=g_2$, который соответствует начальным значениям $s=0$ и $\dot{s}=-v_0$. Очевидно, будем иметь

$$s=\frac{1}{2}g_2t^2-v_0t.$$

Уравнение $\dot{s}(t)=0$, т. е.

$$g_2t-v_0=0,$$

допускает один (и только один) положительный корень

$$t_1=\frac{v_0}{g_2}.$$

От момента $t=0$ до $t=t_1$ движение будет восходящим, и пройденный путь будет измеряться (по абсолютной величине) значением

$$-s=t\left(v_0-\frac{1}{2}g_2t\right).$$

При $t=t_1$, в частности, имеем $-s_1=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g_2}$. Хотя скорость будет равна нулю, движение, однако, не прекратится (в предположении, что $\alpha>\varphi$). Начнется, следовательно, нисходящая фаза движения, определяемая уравнением $\ddot{s}=g_1$ (где $g_1>0$) и начальными условиями $s=s_1$, $\dot{s}=0$ при $t=t_1$. Соответствующий интеграл будет выражен равенством:

$$s=\frac{1}{2}g_1(t-t_1)^2+s_1.$$

Уравнение $\dot{s}(t)=0$ не имеет корня, большего, чем t_1 (или, иначе, скорость не исчезает при $t>t_1$), потому что движение будет равноускоренным, начинаясь из состояния покоя в момент t_1. Поэтому предыдущее выражение для s остается в силе для всякого значения $t > t_1$.

Совершенно аналогично разбираются и случаи $\alpha > \varphi$, $\dot{s}_0 > 0$, или $\alpha \leqslant \varphi$ с вариантами $\dot{s}_0 < 0$ и $\dot{s}_0 > 0$.

§ 9. Вертикальное движение тяжелого тела с учетом сопротивления воздуха

52. В виде приложения теории, изложенной в § 4, рассмотрим простой случай свободного падения тяжелого тела, принимая во внимание сопротивление воздуха.

Предположим, что падение происходит по вертикали и сопротивление воздуха может быть представлено силой, пропорциональной квадрату скорости.

Условимся отсчитывать расстояния s от начального положения вниз; тогда будем иметь $\dot{s} = v$, $\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$,

$$F_t = mg - KA\alpha v^2.$$

Если для краткости введем положительную постоянную V, определяемую равенством

$$V^2 = \frac{mg}{KA\alpha}, \tag{36}$$

то уравнение движения примет вид

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{37}$$

Это уравнение показывает, что если скорость v меньше V, то ускорение $\frac{dv}{dt}$ положительно и, следовательно, движение будет ускоренным; если, наоборот, скорость v больше V, движение будет замедленным.

Отметим, что одно из частных решений определяется равенством $v = V$, т. е. мы имеем равномерное движение с критической скоростью V. Чтобы составить себе представление о порядке величины V, положим в равенстве (36) $\alpha = 1$ и $K = 0{,}08$ (п. 22), в силу этого $1/\sqrt{K}$ будет немного меньше 3.

Тогда V приблизительно будет равно утроенному значению корня

$$\sqrt{\frac{\text{вес (выраженный в } кг)}{\text{площадь наибольшего сечения, перпендикулярного к скорости (выраженная в } m^2)}}$$

При весе в 100 *кг* парашюта с радиусом в 5 или 6 *м* (т. е. с площадью наибольшего сечения около 100 $м^2$) можно предполагать для V значение около 3 *м/сек*; такая скорость сама по себе не опасна.