предыдущее выражение для s остается в силе для всякого значения $t > t_1$.

Совершенно аналогично разбираются и случаи $\alpha > \varphi$, $\dot{s}_0 > 0$, или $\alpha \leqslant \varphi$ с вариантами $\dot{s}_0 < 0$ и $\dot{s}_0 > 0$.

§ 9. Вертикальное движение тяжелого тела с учетом сопротивления воздуха

52. В виде приложения теории, изложенной в § 4, рассмотрим простой случай свободного падения тяжелого тела, принимая во внимание сопротивление воздуха.

Предположим, что падение происходит по вертикали и сопротивление воздуха может быть представлено силой, пропорциональной квадрату скорости.

Условимся отсчитывать расстояния s от начального положения вниз; тогда будем иметь $\dot{s} = v$, $\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$,

$$F_t = mg - KA\alpha v^2.$$

Если для краткости введем положительную постоянную V, определяемую равенством

$$V^2 = \frac{mg}{KA\alpha}, \tag{36}$$

то уравнение движения примет вид

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{37}$$

Это уравнение показывает, что если скорость v меньше V, то ускорение $\frac{dv}{dt}$ положительно и, следовательно, движение будет ускоренным; если, наоборот, скорость v больше V, движение будет замедленным.

Отметим, что одно из частных решений определяется равенством $v = V$, т. е. мы имеем равномерное движение с критической скоростью V. Чтобы составить себе представление о порядке величины V, положим в равенстве (36) $\alpha = 1$ и $K = 0{,}08$ (п. 22), в силу этого $1/\sqrt{K}$ будет немного меньше 3.

Тогда V приблизительно будет равно утроенному значению корня

$$\sqrt{\frac{\text{вес (выраженный в } кг)}{\text{площадь наибольшего сечения, перпендикулярного к скорости (выраженная в } m^2)}}$$

При весе в 100 *кг* парашюта с радиусом в 5 или 6 *м* (т. е. с площадью наибольшего сечения около 100 $м^2$) можно предполагать для V значение около 3 *м/сек*; такая скорость сама по себе не опасна.

Как увидим немного ниже, V представляет собой асимптотическое значение скорости падения.

53. Формальное интегрирование уравнения (37) непосредственно выполняется путем разделения переменных. Прежде чем выполнять это интегрирование, отметим, что если в какой-нибудь момент скорость тела меньше критической скорости V, то она, постоянно возрастая, никогда не будет превосходить V и будет асимптотически стремиться к V при $t \to \infty$. Равным образом, если в какой-нибудь момент скорость превосходит V, то она будет постоянно оставаться больше V и, убывая, будет асимптотически стремиться к V при бесконечном возрастании t.

В обоих случаях доказательства совершенно аналогичны. Рассмотрим, например, первый случай и покажем, что, допустив противное, мы придем к противоречию.

Допустим, следовательно, что скорость может превзойти V. Так как речь идет о непрерывной функции, то она должна, по крайней мере один раз, принять значение V. Пусть t_1 будет момент времени, когда это произойдет в первый раз; пусть, далее, t' и $t'' > t'$ будут два какие-нибудь момента времени, предшествующие t_1, v' и v'' (причем $v'' > v'$, в силу того, что скорость возрастает вместе с t) — соответствующие значения v.

Разделяя переменные в уравнении (37) и интегрируя от t' до t'' (при этом заметим, что при возрастании t от t' до t'' v изменяется, все время возрастая, от v' до v''), получим

$$\int_{v'}^{v''} \frac{dv}{1-\frac{v^2}{V^2}} = g(t''-t').$$

Противоречие, о котором было сказано выше, можно увидеть из этой формулы, если заставить t'' приближаться к t_1'. Действительно, в то время как правая часть стремится к конечному пределу $g(t_1-t')$, левая часть (v'' стремится к V, когда t'' стремится к t_1) имеет пределом бесконечность, так как функция под знаком интеграла при $v=V$ имеет бесконечность первого порядка.

54. Перейдем теперь к интегрированию уравнения (37) в предположении, что движущееся тело предоставлено самому себе без начальной скорости, или в более общем случае, что оно брошено вниз со скоростью $v_0 < V$. Как мы уже видели, v все время меньше V, поэтому, если написать уравнение (37) с разделенными переменными в виде

$$\frac{2g\,dt}{V} = \frac{2}{V}\frac{dv}{1-\frac{v^2}{V^2}} = \left\{\frac{1}{1+\frac{v}{V}} + \frac{1}{1-\frac{v}{V}}\right\}\frac{dv}{V},$$

то в правой части знаменатели всегда будут положительными. Отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{2g}{V}t=\ln\frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}}+\mathrm{const},$$

где постоянную интегрирования можно обозначить через $\frac{2g}{V}t^*$ мы определим ее исходя из условия, что $v=v_0$ при $t=0$, что, в частности, дает $t^*=0$, когда начальная скорость $v_0=0$[1]).

Если перейдем от логарифмов к числам, разрешим уравнение относительно v и положим для краткости $\tau=g\frac{t-t^*}{V}$, то найдем

$$\frac{v}{V}=\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}} \tag{38}$$

или

$$v=V-\frac{2V}{e^{2\tau}+1}.$$

Последнее соотношение, в котором v явно выражено через τ, а потому и через t подтверждает тот факт, что скорость всегда меньше V и стремится к V при безграничном возрастании t.

55. Пройденное пространство s можно вычислить посредством новой квадратуры. Действительно, так как $ds=vdt$, то на основании соотношения между t и τ можно написать

$$ds=\frac{V}{g}vd\tau$$

и, следовательно, в силу уравнения (38)

$$ds=\frac{V^2}{g}\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau=\frac{V^2}{g}d\ln(e^{\tau}+e^{-\tau}).$$

Отсюда, интегрируя и принимая $s=0$ при $t=0$, т. е. при $\tau=-\frac{gt^*}{V}=\tau_0$, получим искомое выражение для s

$$s=\frac{V^2}{g}\ln\frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}}. \tag{39}$$

[1]) Так как в течение всего движения предполагается, что сопротивление пропорционально квадрату скорости, то необходимо предварительно проверить, что предельные скорости v_0 и V не превосходят значений, при которых этот закон справедлив. При строгом доказательстве случай начальной скорости, равной нулю, следовало бы исключить (п. 29), потому что при очень малых скоростях этот закон не имеет места. Поэтому приложение формулы к этому случаю можно оправдать только тем, что скорость возрастает достаточно быстро, и, следовательно, можно пренебречь возмущающим влиянием первого периода, когда закон квадратичного сопротивления еще не имеет места.

К тому же результату, но в другой форме можно прийти, если взять уравнение (37) и рассматривать (как в п. 48) $v=\frac{ds}{dt}$ как сложную функцию от t через посредство s. В силу этого будем иметь

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v=\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds}$$

и уравнению (37) можно придать вид

$$\frac{2g}{V^2}ds=\frac{1}{V^2}\frac{d(v^2)}{1-\frac{v^2}{V^2}}.$$

Интегрируя и замечая, что при $v=v_0$ должно быть $s=0$, придем к равенству

$$s=\frac{V^2}{2g}\ln\frac{V^2-v_0^2}{V^2-v^2}, \tag{39'}$$

которое вместе с равенством (38) даст выражение s через τ. Эквивалентность выражений (39′) и (39) можно установить, принимая во внимание равенство (38) и его выражение в начальный момент

$$\frac{v_0}{V}=\frac{e^{\tau_0}-e^{-\tau_0}}{e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}}.$$

56. Равенством (39′) можно воспользоваться для установления соотношения между высотой падения и энергией, потерянной вследствие сопротивления воздуха. В любой момент полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) равна

$$m\left(\frac{v^2}{2}-gs\right).$$

Вычитая эту величину из ее начального значения $\frac{mv_0^2}{2}$, получим меру потерянной энергии (которая преобразуется главным образом в тепловую)

$$q=\frac{m}{2}(v_0^2-v^2+2gs).$$

Теперь равенство (39′) можно написать в виде

$$-\frac{2gs}{V^2}=\ln\left\{1+\frac{v_0^2-v^2}{V^2-v_0^2}\right\}.$$

Если перейдем теперь от логарифмов к числам, разрешим уравнение относительно $v_0^2-v^2$ и подставим результат в предыдущее равенство, то получим

$$q=\frac{m}{2}\left\{(V^2-v_0^2)(e^{-\lambda}-1)+2gs\right\},$$

где для краткости положено

$$\lambda = \frac{2gs}{V^2}.$$

Предположим, в частности, что $v_0 = 0$ и высота падения мала; точнее, рассмотрим такие значения s, при которых величина $\sqrt{2gs}$, т. е. скорость, которую приобрело бы в пустоте тяжелое тело при высоте падения s, мала по сравнению с предельной скоростью V. Можно пренебречь тогда степенями отношения $\lambda = 2gs/V^2$ выше второй и положить

$$e^{-\lambda} = 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2}.$$

(Вместо $e^{-\lambda}$ мы берем здесь разложение этой функции в ряд Маклорена, ограничиваясь первыми тремя членами, так как четвертый и следующие члены имеют степени λ выше второй и потому отбрасываются.) В таком случае получим

$$q = \frac{m}{4} V^2\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda mgs,$$

откуда видно, что энергия, потерянная на пути s, есть часть работы, совершенной силой тяжести, или, если угодно, часть живой силы, которую имело бы падающее тело, падая по тому же пути в пустоте. $\left(\frac{\lambda}{2} = \frac{gs}{V^2}\right.$ при нашем предположении — величина малая.$\left.\right)$

57. Следует добавить, что при вертикальном движении вверх имеем $F_t = mg + KA\alpha v^2$ (вертикальная сила, направленная вниз) и $\dot{s} = -v$. Принимая во внимание равенство (36), можно уравнение движения представить в виде

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{37'}$$

Если вначале движущееся тело имеет скорость, направленную вверх, то надо воспользоваться уравнением (37'). Оно будет справедливым до тех пор, пока скорость тела не станет равной нулю (при этом сила тяжести и сопротивление воздуха вместе противодействуют движению). Это произойдет даже скорее, чем в пустоте (как это непосредственно ясно и как к тому же это следует из уравнения (37')). До этого момента между t и v имеем соотношение

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{V} = -\frac{g}{V}t + \text{const},$$

которое получается непосредственно из уравнения (37'), если мы разделим в нем переменные и проинтегрируем его. Постоянная определяется на основании значения начальной скорости. Обозначив её через $\frac{g\tau}{V}$ и, придав предыдущему уравнению вид

$$v = V \operatorname{tg} \frac{g}{V}(\tau - t), \tag{38'}$$

мы убедимся, что v убывает, начиная с момента $t = 0$, и к концу промежутка времени τ принимает значение, равное нулю.

При дальнейшем интегрировании уравнения (38') можно получить выражение для пути при движении вверх для промежутка времени $(0, \tau)$. Начиная с этого момента, будет происходить свободное падение, определяемое уравнением (37).

§ 10. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс

58. В виде приложения теории, развитой в § 4 и 5, рассмотрим движение по заданной траектории материальной точки P с массой m, находящейся под действием восстанавливающей силы $-\lambda s$ и пассивного сопротивления вязкого трения $-b\dot{s}$ [1]).

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - \lambda s,$$

где b и λ обозначают две положительные постоянные; достаточно положить

$$\frac{b}{m} = 2h, \quad \frac{\lambda}{m} = k,$$

чтобы привести его к виду

$$\ddot{s} + 2h\dot{s} + ks = 0. \tag{40}$$

Таким образом мы снова нашли дифференциальное уравнение (линейное, с постоянными коэффициентами), исчерпывающим образом разобранное в отношении определяемых им движений в кинематике (т. I, гл. II, п. 41—43). Вспоминая установленные там результаты, мы можем прямо утверждать, что точка P при указанных выше условиях совершает или затухающие колебания около точки O, или же апериодическое движение (самое большее с одним обращением направления и с асимптотической точкой на конечном расстоянии или в бесконечности).

Наиболее интересным случаем, которым мы здесь и ограничимся, является случай затухающих колебаний; он, как мы знаем, характеризуется условием $k > h^2$. Если положим тогда $k = h^2 + \omega^2$, то уравнение (40) примет известную уже форму

$$s + 2h\dot{s} + (h^2 + \omega^2)s = 0; \tag{40'}$$

[1]) Глубокое исследование для случая, когда сопротивление выражается квадратичным законом, можно найти в мемуаре Синьорини (Signorini, *Atti del R. Ist. Ven*, т. 73, 1914, стр. 803—858).