через $\frac{g\tau}{V}$ и, придав предыдущему уравнению вид

$$v = V \operatorname{tg} \frac{g}{V}(\tau - t), \tag{38'}$$

мы убедимся, что v убывает, начиная с момента $t = 0$, и к концу промежутка времени τ принимает значение, равное нулю.

При дальнейшем интегрировании уравнения (38′) можно получить выражение для пути при движении вверх для промежутка времени $(0, \tau)$. Начиная с этого момента, будет происходить свободное падение, определяемое уравнением (37).

§ 10. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс

58. В виде приложения теории, развитой в § 4 и 5, рассмотрим движение по заданной траектории материальной точки P с массой m, находящейся под действием восстанавливающей силы $-\lambda s$ и пассивного сопротивления вязкого трения $-b\dot{s}$ [1]).

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - \lambda s,$$

где b и λ обозначают две положительные постоянные; достаточно положить

$$\frac{b}{m} = 2h, \quad \frac{\lambda}{m} = k,$$

чтобы привести его к виду

$$\ddot{s} + 2h\dot{s} + ks = 0. \tag{40}$$

Таким образом мы снова нашли дифференциальное уравнение (линейное, с постоянными коэффициентами), исчерпывающим образом разобранное в отношении определяемых им движений в кинематике (т. I, гл. II, п. 41—43). Вспоминая установленные там результаты, мы можем прямо утверждать, что точка P при указанных выше условиях совершает или затухающие колебания около точки O, или же апериодическое движение (самое большее с одним обращением направления и с асимптотической точкой на конечном расстоянии или в бесконечности).

Наиболее интересным случаем, которым мы здесь и ограничимся, является случай затухающих колебаний; он, как мы знаем, характеризуется условием $k > h^2$. Если положим тогда $k = h^2 + \omega^2$, то уравнение (40) примет известную уже форму

$$s + 2h\dot{s} + (h^2 + \omega^2)s = 0; \tag{40'}$$

[1]) Глубокое исследование для случая, когда сопротивление выражается квадратичным законом, можно найти в мемуаре Синьорини (Signorini, *Atti del R. Ist. Ven*, т. 73, 1914, стр. 803—858).

здесь ω определяет постоянную частоты колебаний и h — постоянную затухания; тогда закон движения (общий интеграл уравнения (40')) принимает вид

$$s = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0),$$

где r и θ_0 суть две произвольные постоянные.

Первым примером движений этого типа, реализуемым физически, является пример колебаний простого маятника в вязкой среде (п. 41). Не менее наглядным и интересным является случай *свободных колебаний* камертона, когда камертон, после возбуждения в нем колебаний, предоставлен самому себе в спокойном воздухе.

В этом случае конец одной из ножек можно рассматривать как материальную точку, которая колеблется, описывая линию, очень мало отличающуюся от прямой. Его связь с ножкой определяет восстанавливающую силу и пассивные сопротивления (трение, несовершенную упругость и т. п.), к которым присоединяется пассивное сопротивление воздуха. Эти пассивные сопротивления в первом приближении можно свести к простому вязкому сопротивлению, так что приблизительно будут осуществлены условия действия силы, предположенные в самом начале. Тогда, если обозначим через s дугу, описываемую концом ножки и отсчитываемую от положения равновесия (положительную в одном направлении и отрицательную в другом), то движение определится как раз уравнением типа (40). Так как, далее, результирующее (касательное) пассивное сопротивление крайне мало по сравнению с упругой силой, то с большим избытком выполнится условие $k > h^2$, обеспечивающее для движения характер затухающего колебания.

То обстоятельство, что в предположенных условиях период $T = 2\pi/\omega$ не зависит от начальных условий (способа возбуждения), а зависит только от h и k, т. е. только от внутренних свойств камертона, оправдывает его назначение как инструмента, служащего для получения звука определенной высоты.

59. Вынужденные колебания. Обыкновенно так называют те колебания, которые возбуждаются заданной периодической силой, действующей вместе с силами уже рассмотренного типа (восстанавливающая сила и вязкое сопротивление).

Обозначая через Q касательную составляющую этой силы в направлении возрастания s, деленную на m, т. е. отнесенную к единице массы движущейся точки, и через $E(s)$ — дифференциальное выражение в левой части равенства (40), получим уравнение движения в виде

$$E(s) = Q. \qquad (41)$$

Периодическая сила Q в любой момент предполагается численно определенной и, следовательно, рассматривается как функция только одного t с некоторым заданным периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$.

60. При интегрировании уравнения (41) (линейное неоднородное уравнение) все сводится, как известно, к определению частного интеграла $J(t)$, так как из него далее сразу же выводится общий интеграл, если положить

$$s = J + \sigma, \tag{42}$$

где σ обозначает общий интеграл уравнения без правой части $E(s) = 0$, т. е. (п. 58)

$$\sigma = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0), \quad \omega = \sqrt{k - h^2}$$

с двумя произвольными постоянными интеграции r и θ_0.

Что сумма $J + \sigma$ действительно представляет собой общий интеграл уравнения (41) — очевидно. Прежде всего, складывая оба уравнения, которым по определению удовлетворяют J и σ,

$$E(J) = Q, \quad E(\sigma) = 0,$$

получим

$$E(J) + E(\sigma) = E(J + \sigma) = Q,$$

и, следовательно, $J + \sigma$ удовлетворяет уравнению (41). Кроме того, эта сумма содержит (как и σ) две независимые произвольные постоянные.

Из выражения общего интеграла (42), приняв во внимание то обстоятельство, что σ стремится к нулю при бесконечном возрастании t (или практически становится равным нулю через сравнительно небольшой промежуток времени), мы получим важнейший критерий для конкретных приложений. Именно, *чтобы характеризовать режим вынужденных колебаний* (режим, который устанавливается тем быстрее, чем больше затухание h), достаточно *рассмотреть частный интеграл J*.

61. Постоянная добавочная сила. Рассмотрим прежде всего простейший случай постоянной добавочной силы (которая является пределом периодически изменяющейся силы, когда стремится к нулю период, в конце которого восстанавливаются те же условия). Частный интеграл J уравнения $E(s) = Q$ при постоянном Q определяется, естественно, значением, тоже постоянным, $s = Q/k$, соответствующим состоянию *вынужденного равновесия*; положение вынужденного равновесия несколько смещено от положения естественного равновесия ($s = 0$).

Добавочное возбуждение является статическим, статическим же будет и соответствующее ему состояние. Что же касается общего интеграла $s = J + \sigma$, то он представляет собой (как это легко видеть, принимая положение $s = J$ за начало дуг) затухающие колебания, тождественные с теми, которые имели бы место при отсутствии Q, за исключением лишь того, что центр колебания оказывается смещенным и находится в новом положении равновесия.

62. Синусоидальная возмущающая сила. Явное выражение J легко может быть получено еще в одном особенно важном случае, когда периодическая функция Q является синусоидальной, т. е. выражается функцией вида

$$q \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

где q, α (и ω_1) суть какие-нибудь заданные постоянные. Заметим, что если мы хотим иметь косинус вместо синуса, то можно заменить α на $\alpha + \pi/2$; с другой стороны, смещая начало отсчета времени, всегда можно сделать $\alpha = 0$, $q > 0$.

Положим

$$Q = q \sin \omega_1 t, \qquad (q > 0)$$

и покажем, что дифференциальное уравнение (41) допускает частный интеграл вида

$$J(t) = p \sin(\omega_1 t - \varphi), \tag{43}$$

где постоянные p и φ, разумеется, должны быть выбраны надлежащим образом.

и С этой целью будем исходить из тождества

$$E(J) = \ddot{J} + 2h\dot{J} + kJ = p\,\{2h\omega_1 \cos(\omega_1 t - \varphi) + \\ + [k - \omega_1^2] \sin(\omega_1 t - \varphi)\}$$

и заметим, что для того, чтобы сделать $E(J)$ тождественным с

$$Q = q \sin \omega_1 t = q \sin[\varphi + (\omega_1 t - \varphi)] = \\ = q\,\{\sin\varphi \cos(\omega_1 t - \varphi) + \cos\varphi \sin(\omega_1 t - \varphi)\},$$

достаточно в обоих выражениях приравнять коэффициенты при

$$\cos(\omega_1 t - \varphi) \quad \text{и} \quad \sin(\omega_1 t - \varphi).$$

Таким образом получим систему

$$2hp\omega_1 = q \sin\varphi,$$
$$p(k - \omega_1^2) = q \cos\varphi,$$

однозначно определяющую обе постоянные p и φ, если примем $p > 0$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Действительно, возводя в квадрат последние два равенства, складывая их и извлекая квадратный корень, получим

$$p = \frac{q}{\sqrt{(k - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2}}, \tag{44}$$

где согласно принятому условию радикал надо понимать в арифметическом смысле. С другой стороны, если эти равенства разделим одно на другое, то получим соотношение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2h\omega_1}{k - \omega_1^2}, \tag{45}$$

которым в согласии с условием $0 \leqslant \varphi < \pi$ и определяется угол φ.

Частное решение (43), определенное таким образом, является, очевидно, периодическим с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$ возмущающей силы $Q = q \sin \omega_1 t$; в нем p есть амплитуда вынужденных колебаний, а φ можно истолковать как *разность фаз* или *запаздывание фазы* между силой и перемещением. Из равенства (45) следует, что $\operatorname{tg} \varphi$ будет положительным или отрицательным и, следовательно, φ меньше или больше $\pi/2$ (т. е. четверти периода[1])) в зависимости от того, будет ли ω_1^2 меньше или больше k.

63. Случай слабого затухания. Если предположим, что постоянная затухания h очень мала (как это, в частности, имеет место для камертона) и если, следовательно, величиной h^2 можно пренебречь по сравнению с k, то можно отождествить k с $k - h^2 = \omega^2$ (квадрат постоянной частоты свободных колебаний). Тогда установленному выше критерию различения $\omega_1^2 \lesseqgtr k$ можно придать вид $\omega_1^2 \lesseqgtr \omega^2$ или

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^2 \lesseqgtr \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2.$$

Отсюда приходим к заключению, что при очень слабом затухании запаздывание фазы будет меньше четверти периода ($\varphi < \pi/2$) всякий раз, когда частота (величина, обратная периоду) внешней (возмущающей) силы будет меньше частоты свободных колебаний; в противном случае запаздывание фазы будет больше четверти периода.

Полезно, кроме того, заметить, что при вычислении амплитуды p нельзя пренебречь в знаменателе (44) слагаемым $4h^2\omega_1^2$ по сравнению с $(k - \omega_1^2)^2$, если известно только, что h^2 мало по сравнению с k. Этого, конечно, нельзя делать, если ω_1^2 и k (или ω^2) близки по величине. В этом случае надо придерживаться точной формулы (44). Но если при очень малом h частота ω_1 возмущающей силы не очень близка к частоте ω свободных колебаний системы, то вместо формулы (44) можно будет воспользоваться приближенной формулой

$$p = \frac{q}{k - \omega_1^2} \tag{44'}$$

или, если угодно,

$$p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Далее, если, помимо допущенных до сих пор предположений, имеет место также и то обстоятельство, что величина ω_1 очень мала, так что ею можно пренебречь по сравнению с ω (или, что одно и то же, по сравнению с k), то из равенства (45) следует, что

[1]) Поскольку по отношению к фазе $(\omega_1 t - \varphi)$ интеграла J, определяемого уравнением (43), $\pi/2$ представляет как раз четверть от периода 2π.

приближенно $\varphi = 0$. В этом случае можно сказать, что следствие (перемещение) находится в одной фазе с причиной (сила). Амплитуду p можно положить на основании формулы (44') приближенно равной q/k, т. е. *статическому смещению*, которое было бы вызвано постоянной силой, по величине равной максимальному значению q периодической возмущающей силы.

64. Идеальный случай, когда сопротивление равно нулю. Обратимся прямо к идеальному предположению об абсолютном отсутствии всякого пассивного сопротивления ($h = 0$, $k = \omega^2$), и для соответствующего уравнения

$$\ddot{s} + \omega^2 s = q \sin \omega_1 t \tag{41'}$$

будем искать периодическое решение в форме (43). При фактической подстановке придем к системе

$$\begin{gathered} 0 = q \sin \varphi, \\ p(\omega^2 - \omega_1^2) = q \cos \varphi, \end{gathered} \tag{46}$$

которая (если также и здесь принимается ограничение $0 \leqslant \varphi < \pi$) дает

$$\varphi = 0,$$

и при условии

$$\omega \lessgtr \omega_1$$

$$p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Таким образом, в качестве точного выражения амплитуды вынужденных колебаний мы получили то, что в предыдущем пункте было получено как приближенная величина при очень малом значении h и при значении ω, заметно отличающемся от ω_1.

Если, далее, $\omega_1 = \omega$, т. е. если период $2\pi/\omega_1$ возмущающей силы равен периоду свободных колебаний системы, то, так как требуется, чтобы возмущающая периодическая сила не была постоянно равна нулю (т. е. чтобы не было $q = 0$), система (46) становится противоречивой, т. е. в этом случае для уравнения (41') не существует интеграла чисто синусоидального типа. Непосредственная подстановка показывает, что при $\omega_1 = \omega$ уравнение (41') допускает частный интеграл

$$J(t) = \frac{q}{2\omega^2} t \sin \omega t,$$

который соответствует колебаниям, имеющим период $2\pi/\omega$, общий для свободных колебаний и возмущающей силы, но обладает тем свойством, что амплитуда колебаний возрастает до бесконечности вместе с временем.

65. Резонанс. Обращаясь к общей теории, мы будем предполагать, что постоянные h и k (а следовательно, ω и T), характеризующие колеблющуюся систему, остаются неизменными, равно как и максимальная величина q возмущающей силы; изменяя частоту ω_1 возмущающей силы (или же ее период $T_1 = 2\pi/\omega_1$), мы увидим, что вместе с этим будет изменяться амплитуда p соответствующих вынужденных колебаний. Мы покажем, что p всегда допускает единственный максимум. Если постоянная затухания h, свойственная колеблющейся системе, мала, то максимум этот будет достигнут при значении ω_1, близком (почти равном) к частоте ω свободных колебаний.

Отсюда вытекает объяснение явления *резонанса* (для колеблющихся систем с очень малой постоянной затухания), которое, как известно, заключается в следующем. Пусть внешняя периодическая возмущающая сила с заданной максимальной величиной q при каком-либо значении частоты ω_1 вызывает едва ощутимый эффект (очень малая амплитуда); если величина ω_1 очень близка к собственной частоте ω колеблющейся системы, то эффект (характеризуемый величиной амплитуды p) усиливается и может сделаться значительным.

Типичным примером этого является камертон (постоянная затухания h которого, как мы уже знаем, очень мала).

Предположим, что в окружающем воздухе происходят звуковые колебания, возбуждаемые каким-нибудь другим внешним телом (например, камертоном или органной трубой и т. п.). В этих условиях рассматриваемый камертон подвергается некоторому (очень слабому) периодическому и приближенно синусоидальному воздействию (см. последнее замечание п. 66), которое накладывается на действие внутренних упругих сил.

Мы имеем здесь, таким образом, случай вынужденных колебаний. Обычно они слабы и даже незаметны. Однако, когда внешний звук имеет высоту, равную (или очень близкую) к высоте, характерной для этого камертона, то получается значительное усиление, и колебания камертона оказываются довольно заметными.

Чтобы исследовать изменение p в зависимости от изменения ω_1, возьмем снова равенство (44) и положим

$$\frac{\omega_1^2}{k} = x, \qquad \frac{4h^2}{k} = \varepsilon^2,$$

благодаря чему переменная x, заменяющая частоту ω_1, получается существенно положительной, а при предполагаемой малости h величина ε будет правильной и даже очень малой дробью. В силу этого уравнение (44) можно написать в виде

$$p = \frac{q}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \varepsilon^2 x}}. \qquad (44'')$$

Функция $(1-x)^2+\varepsilon^2 x$ имеет первую производную, равную $-2(1-x)+\varepsilon^2$, и вторую производную, равную постоянной 2, так что она допускает минимум (и притом только один) при $x=1-\varepsilon^2/2$. Отсюда следует, что p при изменении ω_1 имеет максимум (и только один), который соответствует частоте ω_1, определяемой равенством

$$\omega_1^2=k\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)=k-2h^2=\omega^2-h^2. \tag{47}$$

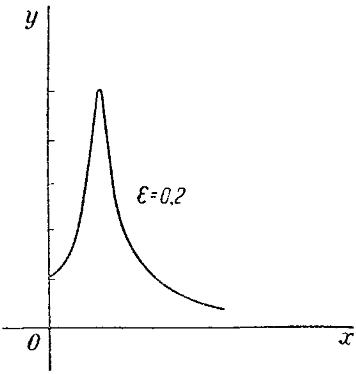
Этот максимум, как легко проверить, полагая в формуле (44)

$$k-\omega_1^2=2h^2, \quad \omega_1^2=\omega^2-h^2,$$

равен

$$\frac{q}{2h\omega}=\frac{\omega}{2h}\cdot\frac{q}{\omega^2}. \tag{48}$$

Из равенств (47) и (48) непосредственно следует, что при очень малых по сравнению с ω значениях h максимум p получится в том случае, когда частота ω_1 близка к ω; этот максимум будет иметь очень большую величину по сравнению с величиной q/ω^2 или, что то же самое, по сравнению с величиной q/k, которая на основании формулы (44″) представляет собой значение p при $x=0$, или же при $\omega_1=0$.



Фиг. 9.

Чтобы получить более отчетливое представление о характере максимума при указанных выше условиях, достаточно обратить внимание на то, что если бы можно было вполне пренебречь величиной h по сравнению с ω и, следовательно, тем более величиной h^2 по сравнению с k, т. е. величиной ε^2 по сравнению с единицей, то максимум величины

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\varepsilon^2 x}}$$

был бы просто равен бесконечности (при $x=1$). Но и при небольших значениях ε (например, не превышающих $^1/_5$) мы будем иметь при $x=1-\varepsilon^2/2$ резко выраженный максимум. Кривая (см. фиг. 9)

$$y=\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\varepsilon^2 x}}$$

очень быстро падает с той и другой стороны от вершины.

66. Случай произвольной периодической возмущающей силы. Мы подробно рассмотрели свойства интеграла J в частном предположении, что периодическая сила Q является синусоидальной, т. е. приводится к виду $q \sin \omega_1 t$.

Важное значение, которое мы придаем этому специальному виду возмущающей силы, вполне оправдывается следующими соображениями.

Прежде всего, если в уравнении (41)

$$E(s) = Q(t)$$

функция $Q(t)$ является суммой двух или нескольких других функций $Q_1, Q_2, \ldots$, для каждой из которых мы умеем определить частные интегралы $J_1, J_2 \ldots$ уравнений $E(s) = Q_1$, $E(s) = Q_2, \ldots$, то, очевидно, достаточно положить

$$J = J_1 + J_2 + \ldots,$$

чтобы иметь интеграл уравнения (41).

Таким образом, если Q есть сумма членов вида

$$q \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

при постоянных q, ω_1, α, выбираемых как угодно для каждого члена, то тотчас же можно будет определить частный интеграл J уравнения (41) в виде суммы стольких же членов типа (43) (плюс возможная постоянная, если среди значений ω_1 имеется и нуль (п. 61)).

Это замечание имеет большую важность, если его связать с одним результатом анализа, известным под названием теоремы Фурье[1]), в силу которой какая угодно функция $Q(t)$, конечная, непрерывная и с заданным периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ (при любом t), может быть представлена рядом (абсолютно и равномерно сходящимся) вида

$$q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n), \tag{49}$$

где q_n и α_n суть надлежащим образом выбранные постоянные.

---

[1]) Жан Баптист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier) родился в Оксерре в 1768 г., умер в Париже в 1830 г., особенно прославился благодаря своему фундаментальному сочинению о распространении тепла (Théorie analytique de la chaleur), представляющему собой классический образец физико-математической теории, не зависящей от схем теоретической механики и выступающей в самостоятельной трактовке. В этом исследовании широко применяются ряды и интегралы, носящие его имя. Он занимался также статикой, обосновав новыми путями принцип виртуальной работы. Был профессором в Высшей политехнической школе в Париже, совершил с Наполеоном I поход в Египет, с 1802 по 1816 г. управлял префектурой Изера и с 1817 г. до конца жизни был непременным секретарем Академии наук в Париже. Полное собрание его сочинений составляют два больших тома, опубликованных в 1890 г. (Paris, Gauthier — Villars).

Разложение определенной функции $Q(t)$ в ряд указанного вида представляет задачу так называемого *гармонического анализа.*

Теорема Фурье вместе с предыдущим замечанием позволяет непосредственно определить (в виде суммы ряда, сходимость которого легко может быть доказана) частный интеграл J уравнения (41) при любом законе действия периодической возмущающей силы.

Заметим еще, что в большинстве практических случаев первый отличный от постоянного член ряда (49) (*основной тон* в акустике) значительно превосходит последующие *(высшие гармоники)*, так что частный интеграл J (если отвлечься от несущественной постоянной) приблизительно приводится к типичной форме (43).

67. Энергия, поглощаемая колеблющейся системой. Сделаем последнее замечание, касающееся энергии, которая при вынужденных колебаниях сообщается (или отнимается, если окажется представленной отрицательным числом) колеблющейся системе действием возмущающей силы Q. В любой промежуток времени dt, которому соответствует перемещение ds движущейся точки, рассматриваемая энергия будет не чем иным, как элементарной работой силы, и, следовательно, поскольку Q относится к единице массы, мы имеем (п. 59)

$$mQds = mQ\dot{s}dt.$$

Энергия, сообщенная в течение целого периода T_1, может быть, таким образом, выражена в виде

$$e = m\int_t^{t+T_1} Q\dot{s}dt. \tag{50}$$

Если примем во внимание, что движение определяется уравнением $E(s) = Q$ и что, следовательно, имеем тождественно

$$Q\dot{s} = E(s)\,\dot{s} = \ddot{s}\,\dot{s} + 2h\dot{s}^2 + ks\dot{s} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{dt} + 2h\dot{s}^2 + \frac{k}{2}\frac{ds^2}{dt},$$

то равенству (50) можно будет придать вид

$$e = \frac{m}{2}\Big[\dot{s}^2 + ks^2\Big]_t^{t+T_1} + 2hm\int_t^{t+T_1} \dot{s}^2dt.$$

Замечая, что s в рассматриваемом случае имеет вид $J + \sigma$ и что при достаточно большом t слагаемым σ можно пренебречь, мы найдем, что при установившемся режиме проинтегрированная часть равна нулю, так как (предыдущий пункт) функция J и, следовательно, $\dot{J}^2 + kJ^2$, так же как и Q, имеет период T_1. Остается, следовательно только интеграл, в котором вместо $\dot{s}$ можно также подставить $\dot{J}$, так что

$$e = 2hm \int\limits_{t}^{+T_1} \dot{J}^2 dt.$$

Эта формула показывает, что энергия e получается существенно положительной, т. е. *чтобы поддерживать вынужденные колебания, необходимо сообщать энергию колеблющейся системе.*

Следует заметить, что энергия e не зависит от t, т. е. что при установившемся режиме затрата энергии, соответствующая интервалу в один период, является всегда одной и той же, каков бы ни был момент t начала интервала. Чтобы это показать, достаточно взять производную по t от предыдущего выражения e; так как определенный интеграл зависит от t только через посредство двух пределов, верхнего и нижнего, это даст

$$\frac{de}{dt} = 2hm \{\dot{J}^2 (t + T_1) - \dot{J}^2 (t)\}.$$

Правая часть равна нулю в силу периодичности функции $\dot{J}$.

Ввиду независимости величины e от t можно условиться выражать затрату энергии в течение одного периода *при установившемся режиме* в виде

$$e = 2hm \int\limits_{0}^{T_1} \dot{J}^2 dt. \qquad (50')$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассматривая хорды сферы, имеющие один конец в самой нижней (или самой верхней) точке, доказать, что падение тяжелой точки вдоль какой нибудь из этих хорд при отсутствии трения совершается в течение одного и того же промежутка времени.

2. На основании предыдущего упражнения определить прямолинейный путь, по которому должна двигаться тяжелая точка при отсутствии трения и с начальной скоростью, равной нулю от заданного положения, чтобы достигнуть данной кривой или данной поверхности в наименьшее возможное время.

3. Математик Т. Бонати предложил и разрешил (Венеция, 1781) следующую задачу. Дана точка O в некоторой вертикальной плоскости; провести через эту точку в заданной плоскости такую кривую, чтобы тяжелая точка, пущенная из точки O без начальной скорости, пробежала по ней некоторую дугу в то же самое время, что и соответствующую хорду, предполагая, что обе опоры лишены трения. Некоторыми авторами эта задача цитируется под именем задачи Саладини, которым она была снова решена (1806).

В полярных координатах ρ и θ с полюсом в O и полярной осью, направленной вдоль нисходящей вертикали, при движении по хорде имеем $2\rho = g \cos\theta t^2$; при движении же по кривой интеграл живых сил дает