только интеграл, в котором вместо $\dot{s}$ можно также подставить J, так что

$$e = 2hm \int_{t}^{+T_1} \dot{J}^2 dt.$$

Эта формула показывает, что энергия e получается существенно положительной, т. е. *чтобы поддерживать вынужденные колебания, необходимо сообщать энергию колеблющейся системе.*

Следует заметить, что энергия e не зависит от t, т. е. что при установившемся режиме затрата энергии, соответствующая интервалу в один период, является всегда одной и той же, каков бы ни был момент t начала интервала. Чтобы это показать, достаточно взять производную по t от предыдущего выражения e; так как определенный интеграл зависит от t только через посредство двух пределов, верхнего и нижнего, это даст

$$\frac{de}{dt} = 2hm \{\dot{J}^2(t + T_1) - \dot{J}^2(t)\}.$$

Правая часть равна нулю в силу периодичности функции $\dot{J}$.

Ввиду независимости величины e от t можно условиться выражать затрату энергии в течение одного периода *при установившемся режиме* в виде

$$e = 2hm \int_{0}^{T_1} \dot{J}^2 dt. \qquad (50')$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассматривая хорды сферы, имеющие один конец в самой нижней (или самой верхней) точке, доказать, что падение тяжелой точки вдоль какой нибудь из этих хорд при отсутствии трения совершается в течение одного и того же промежутка времени.

2. На основании предыдущего упражнения определить прямолинейный путь, по которому должна двигаться тяжелая точка при отсутствии трения и с начальной скоростью, равной нулю от заданного положения, чтобы достигнуть данной кривой или данной поверхности в наименьшее возможное время.

3. Математик Т. Бонати предложил и разрешил (Венеция, 1781) следующую задачу. Дана точка O в некоторой вертикальной плоскости; провести через эту точку в заданной плоскости такую кривую, чтобы тяжелая точка, пущенная из точки O без начальной скорости, пробежала по ней некоторую дугу в то же самое время, что и соответствующую хорду, предполагая, что обе опоры лишены трения. Некоторыми авторами эта задача цитируется под именем задачи Саладини, которым она была снова решена (1806).

В полярных координатах ρ и θ с полюсом в O и полярной осью, направленной вдоль нисходящей вертикали, при движении по хорде имеем $2\rho = g \cos\theta t^2$; при движении же по кривой интеграл живых сил дает

$\dot{\rho}^2 = 2g\rho\cos\theta$. Исключая t, получим для кривой дифференциальное уравнение, которое, по выполнении выкладок, приводится к виду

$$d\rho = \rho \operatorname{ctg} 2\theta d\theta.$$

Интегрирование этого соотношения дает уравнение лемнискаты (с осью, наклоненной под углом в 45°) $\rho^2 = c^2 \sin 2\theta$.

4. Исследовать прямолинейное движение точки, притягиваемой или отталкиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

5. Материальная точка с массой m притягивается к центру O силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Предполагая, что точка предоставлена самой себе без начальной скорости на расстоянии a от O, доказать, что время, которое она употребляет, чтобы достигнуть O, равно $a^3\sqrt{\frac{m}{\mu}}$, где μ есть величина силы, отнесенной к единице массы на единице расстояния.

6. На две материальные точки с одинаковой массой наложена такая связь, что они могут двигаться без трения по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy. Они притягиваются с силой, зависящей только от взаимного расстояния r. Доказать, что если начальные скорости их равны нулю, то обе точки одновременно придут в O.

7. Машина Атвуда. Два груза p и p_1 прикреплены к концам одной веревки, проходящей по жолобу блока с горизонтальной осью. Предполагая, ради определенности, $p > p_1$, представим себе, что система предоставлена самой себе в состоянии покоя. Доказать, что p опускается, и, следовательно, p_1 поднимается с постоянным ускорением

$$\frac{p - p_1}{p + p_1} g.$$

Примечание. Это выражение для ускорения используется в машине Атвуда. При помощи этой машины, как известно, преследуется цель уменьшения в желаемом отношении ускорения g, соответствующего свободному падению тяжелого тела, которое слишком быстро для того, чтобы его можно было удобно наблюдать.

При разборе задачи p и p_1 уподобляются двум материальным точкам, каждая из которых находится под действием двух сил: своего веса и натяжения веревки, причем для последней силы допускается, что она передается вдоль веревки без изменения от p к p_1. Мы уже знаем, что в *статических условиях* принимается в соображение предположение, что можно отвлечься от собственного веса веревки, от ее несовершенной гибкости и, сверх того, от трения, развивающегося на протяжении части веревки, помещающейся в жолобе блока (т. I, гл. XIV, п. 36). При тех же ограничениях можно принять натяжения в точках прикрепления веревки к грузам p и p_1 равными между собой также и во время движения, как это можно было бы легко доказать на основании так называемой *теоремы о движении центра тяжести* (п. 6, гл. V).

Указанный выше результат устанавливается исключением натяжения из уравнений движения двух точек p и p_1, каждой по своей (прямолинейной) траектории.

8. Для точки, находящейся под действием консервативной силы с потенциалом U и вынужденной двигаться по кривой без трения, в силу замечаний гл. I существуют соотношения:

$$R_n = \frac{mv^2}{r} - F_n, \quad mv^2 = 2(U+E)$$

и, следовательно, по исключении v,

$$R_n = \frac{2(U+E)}{r} - F_n.$$

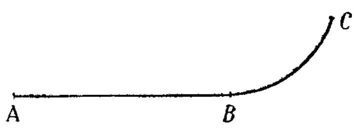
Применить эту формулу к случаю тяжелой точки, находящейся на параболе с вертикальной осью и с вогнутостью, обращенной вверх; в частности доказать, что если скорость точки равна нулю на высоте фокуса, то реакция параболы в самой нижней точке равна удвоенному весу.

9. Кривая c, расположенная в вертикальной плоскости, обращена своею выпуклостью кверху и служит опорой для тяжелой точки, которой сообщается в заданном положении P_0 касательная скорость v_0. Точка покидает кривую, как только реакция перестает быть направленной во внешнюю сторону, так что условие отрыва есть $R_n = 0$, где для R_n, в предположении отсутствия трения, сохраняет силу выражение предыдущего упражнения.

Рассмотреть случаи круга и параболы с вертикальной осью. В этом втором случае ввести скорость u_0, принадлежащую тяжелой точке, которая проходила бы через P_0 в свободном движении (т. е. при отсутствии опоры), описывая данную параболу; доказать, что если $v_0 > u_0$, то движущаяся точка покидает параболу сразу же после начала движения.

10. При предположениях предыдущего упражнения рассмотреть параболический профиль с горизонтальной осью и представить себе, что тяжелая точка оставлена без начальной скорости на высоте h над осью. Доказать, что если p есть параметр параболы, то высота y положения отрыва является положительным корнем кубического уравнения $y^3 + 3p^2y - 2p^2h = 0$, и показать, что при начальной высоте h, очень малой по сравнению с p, отрыв произойдет на высоте $\frac{2h}{3}$.

11. Эллиптический профиль без трения расположен так, что его большая ось вертикальна. В конце малой оси с внутренней стороны профиля бросается тяжелая точка с вертикальной (и, следовательно, касательной), направленной вверх скоростью v_0, определяемой из равенства $v_0^2 = \frac{a^2 + 8b^2}{3\sqrt{3b}} g$, где a и b суть полуоси эллипса. Показать, что точка по истечении небольшого промежутка времени покидает профиль и движется свободно, описывая дугу параболы, проходящую через центр эллипса.



Фиг. 10.

12. Тяжелая точка брошена вдоль горизонтальной опоры со скоростью 5 *м/сек*. Если коэффициент трения опоры есть 0,1, то какой путь будет пройден движущейся точкой, когда ее энергия сведется к половине начальной?

13. Тяжелое колечко, которое можно рассматривать как материальную точку, может скользить с легким трением вдоль направляющей, состоящей из горизонтального прямолинейного участка AB (фиг. 10) длиной l и из плавно

сопряженной с ним дуги BC, представляющей дугу круга в вертикальной плоскости с центром над AB, с радиусом r и центральным углом α. Обозначая через f коэффициент трения, определить скорость, которую надо сообщить движущейся точке (колечку) в A, чтобы она достигла конца C без удара о находящийся там упор (т. е. с нулевой скоростью).

14. Поезд, масса которого M, движется с постоянной скоростью по горизонтальным прямолинейным рельсам так, что, если пренебречь сопротивлением воздуха, тяговое усилие будет равно сопротивлению, происходящему от трения (качения) fMg, где f — постоянная. В некоторый момент несколько вагонов с общей массой m отрываются. Так как двигателя нет, то движение их замедляется в силу сопротивления fmg, и по истечении некоторого времени они останавливаются. Если l есть путь, пройденный ими за время до остановки, то показать, что остальная часть поезда будет находиться от них на расстоянии $Ml/(M-m)$.

15. Показать, обозначая через R полное сопротивление (предполагаемое постоянным), испытываемое поездом, масса которого есть M, и через H — мощность (тоже постоянную) силы тяги, что время, необходимое для того, чтобы сообщить поезду скорость v, меньшую предельной $\frac{H}{R}$, определяется выражением

$$\frac{MH}{R^2}\ln\frac{H}{H-Rv}-\frac{Mv}{R}.$$

16. Сопротивление воздуха движению железнодорожного поезда приближенно выражается в килограммах формулой [1] $R=(0{,}0193+0{,}00172\,n)\,v^2$, где n — число вагонов, составляющих поезд, включая паровоз и тендер, и v — скорость в *км/час*. Если ветер дует со скоростью u в направлении, противоположном движению поезда, то v в этой формуле надо заменить через $v+u$.

Предполагая, что поезд состоит из паровоза, тендера и восьми вагонов и весит 400 *т*, определить добавочную энергию, которую должен дать двигатель, чтобы поддерживать постоянную скорость в 72 *км/час* на пути в 10 *км* и с наклоном 5‰ при встречном порывистом ветре ($u=60$ *км/час*). Ответ 24 528 800 *кг/м*.

17. Тело заданной формы и размеров (в силу чего можно считать известным коэффициент $K\alpha A$, п. 22 предыдущей главы) брошено вертикально вверх. Предполагая энергию заданной и равной Q, определить массу, которую должно иметь тело, чтобы достигнуть максимальной высоты [2].

Очевидно, надо принять во внимание сопротивление воздуха, так как иначе можно было бы сделать высоту какой угодно, уменьшая неограниченно массу.

18. В прямом круговом движении, изученном в п. 36, гл. I, рассмотреть точку Q, расположенную на вертикали над точкой O, на расстоянии $OQ=l/e$ (и поэтому находящуюся внутри круга, поскольку $e>1$) и доказать, что всякая хорда, проходящая через Q, делит окружность на две дуги, пробегаемые движущейся точкой в равные промежутки времени.

19. Исследовать движение математического маятника, принимая во внимание сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Дифференциаль-

[1] Cavalli, Meccanica applicata alle macchine, Napoli, Trani, 1908, стр. 84,
[2] См. Lecornu, Dynamique appliquée 2-e изд., т. I, Париж, 1921, стр. 264—272.

ное уравнение движения в этом случае будет типа $m\ddot{s} = Av^2 + B$, рассмотренного в п. 48, гл. I.

20. Изучить циклоидальное движение (п. 42, гл. I), принимая во внимание сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, или же сопротивление трения. В случае с трением доказать, что существует с той и другой стороны от вершины M положение таутохронности, т. е. такая точка N, которую тяжелая точка, начинающая двигаться без начальной скорости из любого более высокого положения (расположенного с той же стороны, что и N, по отношению к M), достигает за одно и то же время. Исследовать движение в соответствии с общими выводами § 8.

21. Исследовать движение без трения по однородной цепной линии (т. I, гл. XIV, п. 50):

а) тяжелой точки,

б) точки, притягиваемой основанием с силой, пропорциональной расстоянию.

22. При свободном колебании груза на пружине (m есть масса, msk — восстанавливающая сила, $-2mh\dot{s}$ — пассивное сопротивление, при $k > h^2$; см. п. 58) полная энергия (кинетическая энергия + упругая потенциальная энергия) $E = m(\dot{s}^2 + ks^2)/2$ неограниченно убывает с течением времени.

Проверить это, вычислив производную dE/dt и показав, что $dE/dt < 0$ (*рассеяние энергии*).

23. Если к нижнему концу упругой нити с закрепленным верхним концом подвесить груз mg, то нижний конец будет колебаться вдоль вертикали в течение некоторого времени, после чего система примет некоторое положение равновесия. Обозначить удлинение через s. Подвешенное тело подвергается действию упругой силы ks (направленной вертикально вверх), где k есть коэффициент упругости (коэффициент жесткости) нити. Статическое влияние веса выражается в том, что определяет (статическое) удлинение mg/k (п. 61).

Рассматривая то колебание, которое получится, если мы предоставим тело самому себе без начальной скорости и в том положении, когда нить находится в естественном состоянии, располагаясь по вертикали, показать, что максимум удлинения (динамического), если отвлечься от пассивных сопротивлений, равен удвоенному статическому удлинению mg/k. Если же принять во внимание также и вязкое сопротивление $-2mh\dot{s}$, то максимум динамического удлинения равен произведению статического удлинения на $1 + e^{-h\pi/\omega}$, где, как обычно, $\omega^2 = k - h^2$.

24. Пружина, модуль упругости которой k, растянута силой Q и находится в равновесии. Показать, что если направление силы изменить на противоположное, то максимальное сжатие, происходящее вследствие этого, будет равно утроенному начальному удлинению. Пассивными сопротивлениями при этом пренебрегают.

25. Материальная точка (массы 1), движущаяся по заданной траектории, притягивается к началу с силой, равной $\omega^2 s$, и испытывает сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости, с очень малым множителем пропорциональности ε, т. е. таким, квадратом которого можно пренебречь. Уравнение движения есть $\ddot{s} \pm \varepsilon\dot{s}^2 + \omega^2 s = 0$, причем знак у ε выбирается обратный знаку $\dot{s}$.

Из уравнения живых сил следует, что энергия движущейся точки $E = (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2)/2$ за любой интервал времени от t_0 до t_1 уменьшается на

$\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{s}^3 dt$. Пренебрегая величиной ε^2, можно подставить под знак интеграла вместо $\dot{s}$ то значение этой величины, которое она имеет при $\varepsilon = 0$ и которое соответствует гармоническому движению $s = r\cos(\omega t + \theta_0)$ при постоянных r и θ_0.

При полном колебании s не возвращается к своему начальному значению s_0 и получает значение s_1, немного меньшее s_0. Показать, что если принять величину $\Delta s = s_1 - s_0$ за величину первого порядка и, следовательно, вместо $s_1^2 - s_0^2$ величину $2s_0 \cdot \Delta s$, то получится $\Delta s = -4\varepsilon s_0^2/3$.

26. Изложить теорию индикатора Уатта[1]).

27. Вычислить энергию, необходимую для одного периода вынужденного синусоидального колебания при условиях п. 62. Исследовать изменение ее при изменении частоты.

28. Исследовать вынужденные колебания в предположении, что возмущающая сила $Q(t)$ является затухающей синусоидальной, т. е. вида $Q(t) = qe^{-bt}\sin pt$, где b, pq — положительные постоянные.

29. Точка массы m удерживается на гладкой кривой c, которая движется, как неизменяемая система, по заданному закону. Если обозначить через $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ приложенную к точке силу и реакцию связи и принять во внимание теорему Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 3), в силу которой $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{a}_c$, то основное уравнение можно написать в виде

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{R} - 2m\boldsymbol{a}_c,$$

где $\boldsymbol{F}'$ представляет собой результирующую силы $\boldsymbol{F}$ и силы инерции переносного движения $-m\boldsymbol{a}_\tau$. Доказать, что уравнение движения точки по кривой c при очевидном значении символов будет $m\ddot{s} = F'_t$, т. е. что отличие от случая неподвижной опоры (заданной траектории) состоит в том, что вместо активной силы подставляется результирующая этой силы и силы инерции переносного движения системы.

Предполагая, что прямо приложенная сила является позиционной (зависящей только от положения) и что c равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, доказать, что теорема живых сил дает $\frac{m\dot{s}^2}{2} - U(s) - \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \text{const}$, где U имеет значение, указанное в п. 12, гл. I, а r означает расстояние движущейся точки от оси, вообще говоря, изменяющееся вместе с s. Этот результат, в частности, представляет интерес для теории гидравлических турбин[2]).

---

[1]) См. Lecornu, цит. на стр. 78 соч., т. I, стр. 353.
[2]) Müller — Prange, Allgemeine Mechanik, Hannover, 1923, стр. 211