Глава II

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Общие соображения. Первые интегралы

1. Рассмотрим прежде всего движение свободной материальной точки P, находящейся под действием силы $\boldsymbol{F}$. Заметим при этом, что наиболее важными конкретными задачами, приводящими к движению свободной точки (или системы точек) будут:

1°. Баллистические задачи, при решении которых приходится принимать во внимание, что система отсчета, связанная с землей, не является галилеевой, если траектория имеет значительные размеры.

2°. Задачи небесной механики. Мы уже видели (т. I, гл. VII, § 9), что, исходя из основного уравнения $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$, можно получить, проектируя его на оси галилеевой системы координат, три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t), \\ m\ddot{y} &= Y(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t), \\ m\ddot{z} &= Z(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Задача об определении движения свободной точки сводится к интегрированию этой системы дифференциальных уравнений второго порядка по отношению к трем неизвестным функциям x, y, z от одной независимой переменной t, так что при предположенных условиях для точки P возможны ∞^6 отличных друг от друга движений в соответствии с возможным выбором шести произвольных постоянных, от которых зависит общее решение системы (1).

Чтобы выбрать одно из этих движений, необходимо добавить столько дополнительных условий, сколько будет достаточно для определения шести постоянных интеграции. Наиболее простой и обычный способ для этой цели состоит в указании положения и скорости, которые движущаяся точка должна иметь в заданное мгновение (удобнее всего в начальный момент движения).

Отметим также, что интегралы системы (1), вообще говоря, не могут быть получены в конечной форме, и интегрирование выполняется только при помощи разложения в ряды.

Добавим еще, что в каждом случае, чтобы облегчить решение задачи, надо стараться определить какой-нибудь *первый* интеграл системы (1). Так называют всякое соотношение вида

$$f(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t)=\text{const}, \tag{2}$$

которое является *необходимым* следствием уравнений (1), т. е. тождественно удовлетворяется при подходящем значении постоянной в правой части всякой отдельно взятой тройкой функций x, y, z, удовлетворяющих системе (1), и не содержит вторых производных от неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Знание первых интегралов явно облегчает интегрирование системы (1), так как позволяет заменить все уравнения движения или часть их (смотря по тому, будут ли найдены три независимых первых интеграла относительно $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ или меньше трех) уравнениями типа (2), являющимися уравнениями первого порядка.

Если удастся найти более трех независимых интегралов, можно будет произвести дальнейшие упрощения.

2. Существует довольно широкая категория сил, для которых легко найти первые интегралы:

а) Предположим, например, что сила F, приложенная к материальной точке P, *постоянно перпендикулярна к некоторой неподвижной прямой* (или, в частности, равна нулю). Примем эту прямую за ось z, тогда наше предположение будет равносильно условию $Z=0$, поэтому третье уравнение системы (1) при интегрировании даст

$$m\dot{z}=c_1, \quad mz=c_1t+c_2.$$

Это два простейших интеграла, второй из которых есть не что иное, как общий интеграл первого; первый же интеграл, очевидно, показывает, что составляющая количества движения по оси z, т. е. по неподвижной оси, перпендикулярной, по предположению, к направлению действующей силы, остается постоянной. Он называется поэтому *интегралом количества движения*.

Второй интеграл показывает, что соответствующая координата есть линейная функция времени.

б) В качестве следующего примера рассмотрим случай, когда *сила F постоянно пересекает неподвижную прямую* (или, в частности, равна нулю). То же будет иметь место в силу уравнений (1) и для вектора $m\boldsymbol{a}$, приложенного к точке P. Отсюда следует, что момент этого вектора относительно рассматриваемой неподвижной прямой равен нулю. Но если примем эту прямую за ось z, то этот момент (скалярный) определится соответствующей составляющей векторного произведения $\overrightarrow{OP}\times m\boldsymbol{a}$, откуда получим уравнение

$$m(x\ddot{y}-y\ddot{x})=0, \tag{3}$$

которое сразу же дает первый интеграл

$$m(x\dot{y}-y\dot{x})=\text{const}. \tag{4}$$

Этот первый интеграл носит название *интеграла площадей* или интеграла *момента количества движения*, так как он выражает постоянство секторной скорости (т. I, гл. II, п. 20) проекции точки P на плоскость $z=0$ или (что сводится к тому же), постоянство момента количества движения точки относительно оси z.

Если существует первый интеграл (4), то можно сказать, что движение подчиняется *закону площадей* на плоскости $z=0$ относительно точки O; написав этот интеграл в виде

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c, \tag{5}$$

будем иметь постоянную c (удвоенную секторную скорость относительно точки O проекции точки P на плоскость $z=0$), называемую *постоянной площадей*.

Поэтому можно сказать, что *для движения точки под действием силы, постоянно пересекающей некоторую ось, на любой плоскости, перпендикулярной к этой оси, имеет место закон площадей относительно точки, в которой рассматриваемая плоскость пересекает ось.*

Таким же образом, если сила постоянно пересекает ось x или ось y, мы будем иметь соответственно тот или другой из двух первых интегралов

$$m(y\dot{z}-z\dot{y})=\text{const}, \quad m(z\dot{x}-x\dot{z})=\text{const}.$$

Если, далее, речь идет о *центральной* силе $\boldsymbol{F}$ (т. I, гл. VII, п. 29, в) и точка O есть ее центр, то ускорение $\boldsymbol{a}$ точки P в силу своей пропорциональности силе $\boldsymbol{F}$ в любом положении точки будет проходить через O (или, в частности, будет равно нулю). Вследствие этого движение будет *центральным*, и будет иметь место уравнение

$$\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}, \tag{6}$$

выражающее постоянство секторной скорости относительно точки O в векторной форме. Это уравнение равносильно системе трех первых интегралов, написанных выше (интегралов площадей относительно трех координатных осей с началом в точке O).

Из уравнения (6), как мы знаем (т. I, гл. II, пп. 46—47), следует, что движение будет плоским и, еще точнее, будет происходить в плоскости, проходящей через центр.

в) Если сила $\boldsymbol{F}$, приложенная к точке P, *консервативна*, то уравнения (1) допускают, как мы знаем (т. I, гл. VIII, п. 11), *интеграл* (первый) *живых сил*

$$T-U=E,$$

где согласно обычным обозначениям T есть живая сила точки, U — потенциал силы и E — полная энергия (постоянная).