§ 2. Движение точки под действием центральной силы

3. Наиболее известным примером динамической задачи, которая благодаря наличию соответствующего числа первых интегралов оказывается интегрируемой в квадратурах, является задача о движении свободной точки под действием *центральной* силы $\boldsymbol{F}$.

В этом случае, как мы видели в предыдущем пункте (б), прежде всего существует векторный интеграл площадей (6); движение, следовательно, происходит в некоторой плоскости, проходящей через центр силы O. Эту плоскость движения удобно принять за одну из координатных плоскостей, например за плоскость $z=0$, в силу чего из трех (скалярных) интегралов площадей

$$\dot{z}-z\dot{y}=\mathrm{const}, \quad z\dot{x}-x\dot{z}=\mathrm{const}, \quad x\dot{y}-y\dot{x}=\mathrm{const},$$

два первых сведутся к тождеству, так как в любой момент z и $\dot{z}$ (а также и соответствующие постоянные в правой части) будут равны нулю, третье же уравнение

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c$$

дает действительно соотношение между двумя неизвестными координатами и их производными.

С другой стороны, $\boldsymbol{F}$ как центральная сила консервативна (т. I, гл. VII, п. 29, в); точнее, если, как это обычно принято в теории центральных сил, обозначим через r расстояние OP и через $\varphi(r)$ составляющую по направленной прямой OP силы $\boldsymbol{F}$ (отнесенной к единице массы), то потенциал U будет определенной функцией от r (по крайней мере с точностью до аддитивной постоянной), определяемой равенством

$$\frac{dU}{dr}=\varphi(r), \tag{7}$$

т. е.

$$U(r)=\int_{r_0}^{r}\varphi(r)\,dr.$$

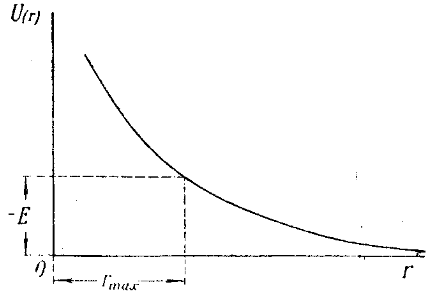
На основании п. 2, б в этом случае имеет место интеграл живых сил; если для простоты за единицу массы принять массу движущейся точки, то этот интеграл примет вид:

$$\frac{v^2}{2}-U(r)=E; \tag{8}$$

из существования двух первых интегралов (5) и (8), как мы увидим, и вытекает интегрируемость в квадратурах задачи (приведенной к плоскости xy) о движении свободной точки под действием центральной силы.

Заметим еще, что в плоскости движения xy неизвестными являются координаты x, y движущейся точки P, и обе эти неизвестные можно определить (с точностью до начальных условий) из уравнений, представляющих два первых интеграла (5) и (8) и составляющих систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Интегрирование этой системы введет две произвольные постоянные, так что, если мы примем во внимание, что c и E тоже являются постоянными (постоянная площадей и постоянная энергии), то увидим, что рассматриваемое нами движение зависит от четырех произвольных постоянных.

Далее, если движение относится к произвольным осям, то необходимы еще два параметра для определения плоскости движения (проходящей через центр O), так что окончательно получится шесть произвольных постоянных, т. е. как раз столько, сколько и должно появиться в общем интеграле всякой задачи о движении свободной точки под действием какой угодно силы.



Фиг. 11.

4. Прежде чем приступить к интегрированию системы (5), (8), остановимся немного на одном замечании качественного характера, относящемся к случаю, когда полная энергия E движущейся точки оказывается отрицательной и потенциал U при беспредельном возрастании r стремится к конечному пределу. Пользуясь произволом выбора аддитивной постоянной интегрирования, этот предел можно всегда сделать равным нулю, как в случае потенциала Ньютона.

Из интеграла живых сил следует, что $U(r) \geqslant -E$, так как $\frac{v^2}{2} \geqslant 0$. Если $E < 0$, то $(-E)$ есть наименьшее возможное значение функции $U(r)$ при движении точки. Отсюда, ввиду того, что при $r \to \infty$ потенциал $U(r)$ исчезает, следует, что при движении точки r имеет конечный верхний предел (фиг. 11). Таким образом мы видим, что если потенциал $U(r)$ центральной силы в бесконечности есть правильная функция, а полная энергия движущейся точки отрицательна, то вся орбита расположена на конечном расстоянии.

В случае притягивающих сил, так как

$$\varphi(r) < 0, \quad U(r) = -\int_r^\infty \varphi(r)\,dr > 0,$$

полная энергия E может оказаться отрицательной, тогда как в случае отталкивающих сил она всегда положительна, так что в этом последнем случае только что сделанное замечание неприложимо.

5. Обращаясь теперь к интегрированию системы (5), (8), начнем с преобразования ее. Отнесем ее к полярным координатам r и θ, имеющим полюс в точке O и полярную ось, направленную по оси x. На основании известных формул (см. т. I, гл. II, п. 19, 20)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

получим дифференциальные уравнения задачи в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= c, \\ \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) &= U(r) + E. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Прежде всего полезно рассмотреть частный случай, когда постоянная площадей c равна нулю. Если исключим не имеющее интереса предположение о состоянии покоя точки P в центре силы ($r = 0$), то будем иметь $\dot{\theta} = 0$, т. е. $\theta = \text{const}$, так что в данном случае речь идет о прямолинейном движении (вдоль прямой, проходящей через центр), и исследование закона движения, т. е. определение r в функции от t, сведется к изучению уравнения живых сил, которое принимает вид

$$\dot{r}^2 = 2[U(r) + E].$$

За исключением различия в обозначениях мы снова получим уравнение типа, подробно разобранного в § 6 предыдущей главы. Применяя непосредственно полученные там выводы, мы заключаем, что возможными движениями будут колебательные периодические движения (между простыми нулями функции $U(r) + E$, где она остается положительной) или апериодические самое большее с одним обращением направления. В этом последнем случае речь будет итти либо о движении к асимптотической точке на конечном расстоянии (т. е. к кратным нулям функции $U(r) + E$), либо о движении к бесконечно удаленной точке (если в направлении начальной скорости не встретится ни одного нуля функции $U(r) + E$). Наконец, возможны и состояния равновесия (во всяком возможном кратном нуле функции $U(r) + E$).

6. Принимая теперь постоянную c отличной от нуля, из закона площадей получим, что угол θ будет изменяться вместе с t всегда в одном и том же направлении, так как $\dot{\theta}$ постоянно имеет один и тот же знак. Не ограничивая общности, можно предположить, что $c > 0$ (так как в случае необходимости можно изменить положительное направление отсчета угла θ на обратное), так что θ будет возрастать вместе с t.

Можно получить теперь дифференциальное уравнение траектории (или *орбиты*, как часто говорят в теории центрального движения), исключая из уравнения (9) время и принимая за независимое переменное угол θ вместо t, что возможно, так как θ является монотонной функцией от t.

Если, интегрируя полученное таким образом дифференциальное уравнение, мы придем к полярному уравнению орбиты $r=r(\theta)$, то качественная картина движения получится из интеграла площадей

$$r^2\dot{\theta}=c.$$

Именно, подставляя в это уравнение вместо r выражение его в функции от θ, мы получим дифференциальное уравнение, которое, очевидно, интегрируется посредством разделения переменных, т. е. посредством одной квадратуры, и дает выражение θ в функции от t, т. е. закон движения (по известной уже орбите).

7. Для того чтобы из уравнений (9) вывести дифференциальное уравнение, характеризующее неизвестное уравнение орбиты $r=r(\theta)$, достаточно рассмотреть в уравнении живой силы r как сложную функцию от t через посредство θ и исключить затем $\dot{\theta}$ при помощи уравнения площадей. Таким образом, для орбиты получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{c^2}{2}\left\{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}=U(r)+E. \tag{10}$$

Заметим еще, что уравнение (10) является первым интегралом дифференциального уравнения второго порядка, к которому можно прийти и прямым путем, прилагая к настоящему случаю формулу Бинэ (т. I, гл. II, п. 53). Эта формула, как мы знаем, дает выражение ускорения (радиального) для центрального движения, каким и является наше движение (п. 4). Если мы напишем, что ускорение (радиальное) движущейся точки (по предположению масса ее равна единице) должно быть равно соответствующей составляющей силы, т. е. $\varphi(r)$, то получим упомянутое уравнение второго порядка

$$-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right)=\varphi(r). \tag{11}$$

Если возьмем производные от обеих частей уравнения (10) по θ и примем во внимание уравнение (7), то увидим, что уравнение (10) (зависящее от произвольной постоянной E) дает как раз первый интеграл уравнения (11).

Относительно уравнения (11) заметим еще, что, если выполнить замену зависимого переменного посредством соотношения

$$u = \frac{1}{r}, \tag{12}$$

то оно примет вид, который будет полезен в дальнейшем:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right). \tag{11'}$$

8. При изучении орбиты мы будем исходить из соответствующего дифференциального уравнения первого порядка (10). Если выполнить в нем замену зависимого переменного (12) и положить

$$\frac{2}{c^2}\left\{U\left(\frac{1}{u}\right)+E\right\} - u^2 = \Phi(u), \tag{13}$$

то уравнение (10) примет вид

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \Phi(u); \tag{14}$$

если не обращать внимания на различие в обозначениях, то мы имеем здесь знакомое уравнение типа (8') из § 6 предыдущей главы.

Это уравнение интегрируется одной квадратурой, так что, принимая во внимание замечания п. 6, мы найдем, как уже упоминалось в п. 3, что *задача о движении свободной точки под действием центральной силы всегда может быть разрешена посредством двух квадратур*.

Более того, здесь благодаря самой форме дифференциального уравнения (14) мы можем предвидеть поведение u при изменении θ, т. е. геометрическую природу орбиты в каждом отдельном случае, на основе общих выводов § 6 предыдущей главы. Необходимо только в кинематической интерпретации заменить независимую переменную t геометрической величиной θ. Так, например, в наиболее интересном случае, когда начальное значение u_0 заключено в промежутке между двумя простыми нулями u_1, u_2 (включая концы) функции $\Phi(u)$, между которыми $\Phi(u)$ является правильной и положительной, функция $u(\theta)$ при возрастании θ будет сколь угодно долго колебаться между крайними значениями u_1, u_2. При каждом прохождении u от u_1 до u_2 или обратно θ будет возрастать на некоторую постоянную величину Θ (аналогичную продолжительности τ одного простого колебания в § 6 предыдущей главы), которая (если положим $u_1 < u_2$) определится равенством

$$\Theta = \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}}. \tag{15}$$

Для того чтобы выяснить геометрический смысл этого результата, вспомним, что $u = \frac{1}{r}$: вся орбита развертывается в круговом кольце, заключенном между двумя концентрическими окружностями с центром в O и радиусами $r_1 = \frac{1}{u_1}$, $r_2 = \frac{1}{u_2}$, и касается последовательно то одной, то другой из этих окружностей таким образом, что разность углов двух последовательных точек касания всегда равна постоянной Θ. Эти точки касания называются апсидами и, поскольку они попеременно соответствуют максимумам и минимумам радиуса-вектора r, их обыкновенно различают, называя первые афелиями и вторые перигелиями, что связано с движением Земли вокруг Солнца (ἥλιος). Угол Θ, определяемый равенством (15), называется *апсидальным углом*.

Когда Θ соизмеримо с 2π, орбита будет замкнутой, в противном случае она должна бесконечное число раз обертываться вокруг центра. В последнем предположении посредством некоторого рассуждения (которого мы здесь не будем приводить, оставляя его до п. 39, где оно будет применено к особенно наглядному случаю) доказывается, что орбита *практически заполняет* круговое кольцо в том смысле, что, какую бы точку внутри кольца мы ни выбрали, орбита в конце концов пройдет от нее на расстоянии, меньшем любого наперед заданного числа.

9. Круговые орбиты. В частном случае, когда начальное значение u_0 переменной u есть кратный нуль функции $\Phi(u)$, u будет сохранять свое значение u_0, как бы ни изменялся угол θ, и мы будем иметь простой, но особенно интересный случай *круговой орбиты* с радиусом $r_0 = \frac{1}{u_0}$, которая в силу закона площадей будет описываться с постоянной угловой скоростью $\frac{c}{r_0^2}$ и, следовательно, равномерно.

Изучение этих круговых орбит очень удобно связать с дифференциальным уравнением второго порядка (11'); если положим в этом уравнении

$$\Psi(u) = -\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right) - u, \tag{16}$$

то можно написать его в виде

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \Psi(u). \tag{17}$$

Для того чтобы существовала орбита, удовлетворяющая этому уравнению, которая была бы окружностью с радиусом a, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы это уравнение удовлетворялось постоянной $u_0 = \frac{1}{a}$, т. е. чтобы имело место равенство

$$\Psi(u_0) = 0. \tag{18}$$

Допуская существование такого нуля функции $\Psi(u)$, можно связать с соответствующей круговой орбитой изучение орбит, близких к ней, т. е. таких, для которых

$$u = u_0 + \varepsilon(\theta), \tag{19}$$

где неизвестную функцию $\varepsilon(\theta)$ для всех значений θ или по крайней мере для значений, лежащих в заданном интервале, можно рассматривать как бесконечно малую величину первого порядка. Допуская это и принимая во внимание соотношение (18), будем иметь

$$\Psi(u_0 + \varepsilon) = \varepsilon \Psi'(u_0),$$

если пренебречь членами, содержащими ε^2. Из уравнения (17) и соотношения (19) мы получим для неизвестной функции $\varepsilon(\theta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} = \varepsilon \Psi'(u_0). \tag{20}$$

Так как это уравнение является линейным с постоянными коэффициентами, то оно может быть проинтегрировано в конечном виде (см. т. I, гл. II, пп. 43, 44).

Если $\Psi'(u_0) < 0$, то достаточно положить $\Psi'(u_0) = -\omega^2$, чтобы уравнению (20) придать вид

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} + \omega^2 \varepsilon = 0;$$

общее решение этого уравнения определяется равенством

$$\varepsilon = p \cos(\omega\theta + q), \tag{21}$$

где p и q — произвольные постоянные. При изменении θ функция ε будет колебаться между p и $-p$; если примем p достаточно малым по абсолютной величине, то будем иметь орбиту, определяемую равенством (19) и уклоняющуюся сколь угодно мало от круговой при всяком возможном значении θ. По этой причине круговая орбита, для которой $\Psi'(u_0) < 0$, называется *устойчивой*.

Орбита (19) пересекает круговую орбиту при тех значениях θ, при которых ε обращается в нуль. Апсидальный угол (разность аномалий между последовательными максимумом и минимумом ε, а следовательно, u и r), который в этом случае совпадает с разностью аномалий между двумя последовательными пересечениями с круговой орбитой, определится равенством

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{-\Psi'(u_0)}},$$

как это следует из формулы (21). Когда $\Psi'(u_0) > 0$, равенство (20) перейдет в следующее:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} = \omega^2 \varepsilon, \tag{22}$$

где

$$\omega = \sqrt{\Psi'(u_0)}.$$

Из выражения для общего решения

$$\varepsilon = c_1 e^{\omega\theta} + c_2 e^{-\omega\theta}$$

видно, что, как бы ни выбирались начальные условия (постоянные интегрирования), функция ε по абсолютному значению в конце концов будет возрастать беспредельно при изменении θ в том или другом направлении. Поэтому предположение о том, что может существовать орбита, бесконечно близкая к круговой, на основании которого мы получили дифференциальное уравнение (20), оправдывается a posteriori только для достаточно малой дуги, т. е. для достаточно ограниченного интервала значений θ. К аналогичному заключению мы придем и в том случае, когда $\Psi'(u_0) = 0$.

Естественно поэтому, в случае когда $\Psi'(u_0) \geqslant 0$, называть круговую орбиту, рассматриваемую в целом, *неустойчивой*.

Рассмотрим, например, случай центральной силы, обратно пропорциональной ν-ой степени расстояния от центра, т. е. предположим

$$\varphi(r) = \frac{k}{r^\nu} = ku^\nu \tag{23}$$

при постоянном (положительном или отрицательном) k.

На основании определения (16) функции $\Psi(u)$ будем иметь

$$\Psi(u) = -\frac{k}{c^2} u^{\nu-2} - u = -\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right) - u,$$

$$\Psi'(u) = (2-\nu)\frac{k}{c^2} u^{\nu-3} - 1 = \frac{2-\nu}{c^2u^3}\varphi\left(\frac{1}{u}\right) - 1.$$

Из равенства $\Psi(u_0) = 0$ следует

$$\varphi\left(\frac{1}{u_0}\right) = -c^2u_0^3$$

и поэтому

$$\Psi'(u_0) = \nu - 3.$$

Следовательно, при законе действия силы, определяемом равенством типа (23), круговые орбиты будут устойчивыми, если $\nu < 3$, и неустойчивыми, если $\nu \geqslant 3$.

10. Сила притяжения, пропорциональная расстоянию. В этом случае орбита представляет собой эллипс (в частности окружность или прямую) с центром в центре притяжения O. Это почти непосредственно следует из дифференциальных уравнений второго порядка (1) в декартовых координатах. Действительно, если ω^2 есть постоянное отношение величины силы (отнесенной к единице массы) к расстоянию OP точки от центра, то для точки P с массой, равной 1, будем иметь два уравнения движения

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y,$$

из которых непосредственно следует, что проекции точки P на оси координат совершают гармоническое колебательное движение с одним и тем же центром O и с одной и той же частотой ω (т. е. с одним и тем же периодом).

В конечном виде будем иметь уравнения

$$x = r_1 \cos(\omega t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega t + \theta_2), \tag{24}$$

где r_1, r_2, θ_1, θ_2 — четыре произвольных постоянных, из которых первые две можно предполагать положительными, а две другие — заключенными между $-\pi$ и π. Если уравнения (24) напишем в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= r_1 (\cos\omega t \cos\theta_1 - \sin\omega t \sin\theta_1) \\ y &= r_2 (\cos\omega t \cos\theta_2 - \sin\omega t \sin\theta_2), \end{aligned}\right\} \tag{24'}$$

то увидим, что они разрешимы относительно $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, кроме случая, когда $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т. е. $\theta_1 = \theta_2$, или же $\theta_1 = \theta_2 \pm \pi$ (гармонические колебания, совпадающие по фазе или с разностью фаз в полпериода, в смысле, указанном в примечании на стр. 69). В обоих этих исключительных случаях соответственно получим, разделив почленно равенства (24'),

$$\frac{x}{r_1} = \pm \frac{y}{r_2},$$

откуда и заключаем, что речь идет о гармоническом прямолинейном движении.

В общем случае, т. е. в предположении, что $\sin(\theta_1 - \theta_2) \neq 0$, из равенства (24') получим:

$$\cos\omega t = \frac{r_1 y \sin\theta_1 - r_2 x \sin\theta_2}{r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \sin\omega t = \frac{r_1 y \cos\theta_1 - r_2 x \cos\theta_2}{r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Возводя в квадрат и складывая, будем иметь уравнение

$$r_2^2 x^2 + r_1^2 y^2 - 2 r_1 r_2 xy \cos(\theta_1 - \theta_2) = r_1^2 r_2^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2),$$

представляющее эллипс с центром в центре притяжения (в частности, окружность при $r_1 = r_2$ и $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т. е. когда оба гармонических колебания имеют равные амплитуды и по фазе отличаются на четверть периода).

Поэтому, если исключим случай круговой орбиты, мы будем иметь четыре апсида соответственно числу вершин эллипса, и апсидальный угол будет прямым.

11. Поучительно найти этот последний результат, относящийся к апсидам, при помощи общих рассуждений пп. 5—8; тогда мы будем иметь то преимущество, что установим соотношение, в случае эллиптической орбиты связывающее длины главных полуосей a, b с механическими постоянными интеграции (постоянной c — площадей и постоянной E — энергии).

Если $c=0$, то можно говорить о прямолинейном движении по прямой, проходящей через центр O (п. 5), а так как действующая сила, согласно ее определению, имеет характер восстанавливающей силы, то движение будет гармоническим (предыдущая глава, п. 18).

Предположим поэтому, что $c>0$ (п. 6). Радиальная составляющая силы и потенциал (в предположении, что аддитивная произвольная постоянная выбрана так, что он обращается в нуль в точке O) определяются соответственно равенствами

$$\varphi(r)=-\omega^2 r, \quad U(r)=-\frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Поэтому, вводя, как обычно, переменную $u=\frac{1}{r}$ для определения орбиты, получим уравнение (14)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\Phi(u),$$

где

$$\Phi(u)=\frac{2}{c^2}\left\{E-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{u^2}-\frac{c^2}{2}u^2\right\}. \tag{25}$$

Чтобы исследовать характер движения, достаточно рассмотреть возможное распределение нулей функции $\Phi(u)$ между $u=0$ и $u\to+\infty$ (поскольку u как величина, обратная радиусу-вектору, существенно положительна). Функция $\Phi(u)$ стремится к $-\infty$ как при $u\to 0$, так и при $u\to+\infty$. С другой стороны, непосредственно можно проверить, что ее производная обращается в нуль только при $u=\sqrt{\frac{\omega}{c}}=u^*$; поэтому $\Phi(u)$ в этой точке необходимо имеет максимум, причем до наступления максимума (т. е. при $0\leqslant u<u^*$) она постоянно возрастает, а после него (т. е. при $u>u^*$) постоянно убывает.

Этот максимум $\Phi(u^*)$, зависящий естественно от постоянных c и E, т. е. по существу от начальных условий, не может быть отрицательным для действительного движения (гл. I, п. 25). Если $\Phi(u^*)=0$, то u^* будет двукратным корнем уравнения $\Phi(u)=0$, при всяком же другом значении будем иметь $\Phi(u)<0$, так что единственным действительным решением уравнения (14) является круговая орбита $u=u^*$ (п. 9). Наконец, когда $\Phi(u^*)>0$, функция $\Phi(u)$ необходимо будет иметь два простых нуля u_1, u_2: первый — заключенный между O и u^* (исключая концы), и второй — больший, чем u^*; u_1 и u_2 ограничивают единственный промежуток значений u, внутри которого функция $\Phi(u)$ остается положительной.

Мы имеем, следовательно, случай, когда u колеблется между двумя крайними значениями u_1 и u_2. Чтобы определить соответствующий апсидальный угол Θ, заметим, что функцию $\Phi(u)$, как это вытекает из (25), можно рассматривать как функцию от аргумента u^2; при членах с u^2 она имеет коэффициент -1, и так как она имеет два нуля: $u^2=u_1^2$ и $u^2=u_2^2$, то мы можем написать

$$\Phi(u)=\frac{1}{u^2}(u^2-u_1^2)(u_2^2-u^2).$$

Поэтому на основании формулы (15) имеем

$$\Theta=\int_{u_1}^{u_2}\frac{udu}{\sqrt{(u^2-u_1^2)(u_2^2-u^2)}};$$

полагая

$$u^2=\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)-\frac{1}{2}(u_2^2-u_1^2)\cos\xi$$

и, следовательно,

$$udu=\frac{1}{4}(u_2^2-u_1^2)\sin\xi d\xi,$$

$$u^2-u_1^2=\frac{1}{2}(u_2^2-u_1^2)(1-\cos\xi),\quad u_2^2-u^2=\frac{1}{2}(u_2^2-u_1^2)(1+\cos\xi),$$

получим

$$\Theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\xi=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, действительно имеем четыре апсида, попарно диаметрально противоположные (вершины эллиптической орбиты).

Если возьмем снова радиус-вектор $r=\frac{1}{u}$ и примем во внимание, что $u_1<u_2$, то увидим, что полуоси этой орбиты определяются равенствами $a=\frac{1}{u_1}$, $b=\frac{1}{u_2}$.

12. Замечание относительно случая отталкивающей центральной силы. В этом случае радиальная составляющая сила $\varphi(r)=\frac{dU}{dr}$ остается положительной при всяком (положительном) значении r. Отсюда следует, что производная

$$\frac{dU}{du}=-r^2\frac{dU}{dr}$$

постоянно отрицательна, и такой же будет [ср. (13)] при изменении u от 0 до ∞ производная

$$\frac{d\Phi}{du}=\frac{2}{c^2}\frac{dU}{du}-2u.$$

Поэтому функция $\Phi(u)$ изменяется постоянно в одном и том же направлении и, следовательно, может обратиться в нуль самое большее один раз. Отсюда следует, что орбита имеет самое большее один апсид.

Легко видеть, что когда апсид существует, он необходимо является перигелием. Действительно, ускорение во всяком случае составляет острый (или прямой) угол с нормалью к траектории, обращенной в сторону вогнутости (т. I, гл. II, п. 26). То же самое можно сказать и относительно силы и, следовательно, так как сила является центральной отталкивающей, относительно радиуса-вектора. Поэтому кривая в окрестности любой ее точки является выпуклой относительно центра силы. Так как в возможном апсиде касательная перпендикулярна к радиусу-вектору, то он необходимо представляет собой минимум. Следовательно, это действительно есть перигелий.

В этом можно убедиться и чисто аналитическим путем при помощи следующего рассуждения.

Дифференцируя уравнение (14) по θ, получим

$$2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d\Phi}{du}\frac{du}{d\theta},$$

или, полагая временно $\frac{du}{d\theta}\neq 0$, т. е. исключая временно апсид $\left(\frac{du}{d\theta}=0\right)$,

$$2\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d\Phi}{du}.$$

Вследствие непрерывности это соотношение останется в силе также и для временно исключенного положения в апсиде.

Так как $\frac{d^2u}{d\theta^2}$, так же как и $\frac{d\Phi}{du}$, отрицательно, то мы заключаем, что если при изменении θ переменная u проходит через предполагаемый существующим нуль функции $\Phi(u)$, то она имеет там максимум, а радиус-вектор $r=\frac{1}{u}$ — соответственно минимум.

§ 3. Основная задача внешней баллистики. Замечание о вторичных задачах [1]*)

13. Предпосылки и формулировка основной задачи. Внешняя баллистика изучает движение снаряда с момента выхода его из канала ствола орудия. Если снаряд уподобляется материальной точке, то

[1]) Для углубленного изучения этих вопросов, имеющих очевидную важность для военных наук, мы отсылаем к специальным трактатам, из которых укажем здесь только на следующие: F. Siacci, Balistica, 2-е изд., Torino, 1888; G. Bianchi, Corso teorico-pratico di Balistica esterna, текст и числовые таблицы (посмертное издание), Torino, 1922; C. Cranz, Lehrbuch der Balistik, 4т., Leipzig, 1910—1918; P. Charbonnier, Traité de Balistique extérieure, т. I, Paris, 1921.

*) См. также Н. Забудский, Внешняя баллистика, Петербург, 1895; Вентцель Д. А., Окунев Б. Н., Шапиро Я. М., Внешняя баллистика, Ленинград, т. I, III (1933), т. II (1934). Levi-Civita e Amaldi, Principi di Balistica esterna, Bologna, 1935. *(Прим. ред.)*