Легко видеть, что когда апсид существует, он необходимо является перигелием. Действительно, ускорение во всяком случае составляет острый (или прямой) угол с нормалью к траектории, обращенной в сторону вогнутости (т. I, гл. II, п. 26). То же самое можно сказать и относительно силы и, следовательно, так как сила является центральной отталкивающей, относительно радиуса-вектора. Поэтому кривая в окрестности любой ее точки является выпуклой относительно центра силы. Так как в возможном апсиде касательная перпендикулярна к радиусу-вектору, то он необходимо представляет собой минимум. Следовательно, это действительно есть перигелий.

В этом можно убедиться и чисто аналитическим путем при помощи следующего рассуждения.

Дифференцируя уравнение (14) по θ, получим

$$2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d\Phi}{du}\frac{du}{d\theta},$$

или, полагая временно $\frac{du}{d\theta}\neq 0$, т. е. исключая временно апсид $\left(\frac{du}{d\theta}=0\right)$,

$$2\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d\Phi}{du}.$$

Вследствие непрерывности это соотношение останется в силе также и для временно исключенного положения в апсиде.

Так как $\frac{d^2u}{d\theta^2}$, так же как и $\frac{d\Phi}{du}$, отрицательно, то мы заключаем, что если при изменении θ переменная u проходит через предполагаемый существующим нуль функции $\Phi(u)$, то она имеет там максимум, а радиус-вектор $r=\frac{1}{u}$ — соответственно минимум.

§ 3. Основная задача внешней баллистики. Замечание о вторичных задачах [1]*)

13. Предпосылки и формулировка основной задачи. Внешняя баллистика изучает движение снаряда с момента выхода его из канала ствола орудия. Если снаряд уподобляется материальной точке, то

[1]) Для углубленного изучения этих вопросов, имеющих очевидную важность для военных наук, мы отсылаем к специальным трактатам, из которых укажем здесь только на следующие: F. Siacci, Balistica, 2-е изд., Torino, 1888; G. Bianchi, Corso teorico-pratico di Balistica esterna, текст и числовые таблицы (посмертное издание), Torino, 1922; C. Cranz, Lehrbuch der Balistik, 4т., Leipzig, 1910—1918; P. Charbonnier, Traité de Balistique extérieure, т. I, Paris, 1921.

*) См. также Н. Забудский, Внешняя баллистика, Петербург, 1895; Вентцель Д. А., Окунев Б. Н., Шапиро Я. М., Внешняя баллистика, Ленинград, т. I, III (1933), т. II (1934). Levi-Civita e Amaldi, Principi di Balistica esterna, Bologna, 1935. *(Прим. ред.)*

перед нами возникает задача изучить движение тяжелой (свободной) точки P, брошенной в воздух с какого-нибудь места земной поверхности с произвольной начальной скоростью v_0. Как уже отмечалось в начале главы, эта задача представляет собой одну из немногих задач о движении свободной материальной точки, встречающихся в действительности; баллистическое истолкование ее является как раз таким, которое освещает в ней все существенно важное.

Если отвлечься не только от движения Земли (относительно неподвижных звезд), но также и от сопротивления воздуха, то останется только рассмотреть движение в пустоте под действием силы тяжести, которую в достаточно ограниченном пространстве можно рассматривать как постоянную по величине и направлению.

Таким образом, снова приходим к уже рассмотренной в кинематической постановке задаче в § 6 гл. II т. I.

Но, как мы уже подчеркивали в свое время, схематическое представление, которое мы получили о движении тяжелой точки, является первым приближением, справедливым для очень малых траекторий и, следовательно, при малых начальных скоростях. В случае же скоростей, даваемых современными орудиями, сопротивление воздуха коренным образом изменяет картину движения снаряда; так, например, для ружейной пули, имеющей начальную скорость 625 *м/сек*, теория параболического движения (соответственно углу возвышения в 45°) дала бы максимальную горизонтальную дальность в 40 *км* и высоту подъема в 4 *км* (см. т. I, гл. II, п. 32), опытным же путем установлено, что в действительности максимальная горизонтальная дальность, которая получается при угле возвышения около 32°, немного превосходит 3 *км*, а высота подъема не превосходит 1/2 *км*.

Мы дадим здесь описание движения снаряда, ближе соответствующее действительности. С этой целью, отвлекаясь пока от вращения Земли и изменения силы тяжести вдоль траектории, мы будем учитывать сопротивление воздуха, т. е. будем изучать задачу о движении тяжелой материальной точки, брошенной с произвольной начальной скоростью в воздухе, предполагая, что последний оказывает сопротивление движению. Это и есть так называемая *основная задача* баллистики (внешней).

Существенным для постановки такой задачи является уточнение, зависящее от поведения сопротивления воздуха, которое, так как речь идет о поступательном движении снаряда, можно схематически представить так, как это сделано в п. 23 первой главы. Согласно этому, в любой момент сопротивление воздуха имеет направление, прямо противоположное скорости $\boldsymbol{v}$ снаряда, и задается в виде некоторой величины, зависящей от плотности μ среды и от абсолютного значения v скорости по закону, устанавливаемому опытным путем. Эта величина f сопротивления воздуха, отнесенная к единице массы (которая, по Сиаччи, называется в баллистике *замедлением*) определяется функцией следующего вида:

$$f=\frac{\mu i}{C} F(v), \tag{26}$$

где i обозначает коэффициент, зависящий от формы снаряда, C — так называемый *баллистический коэффициент* и $F(v)$ — существенно положительную конечную и непрерывную функцию от v. Баллистический коэффициент C прямо пропорционален весу p снаряда и обратно пропорционален площади миделева сечения (гл. I, § 5, п. 22), т. е., так как речь идет о круглых снарядах, квадрату (a^2) радиуса a; точнее,

$$C=\frac{p}{1000a^2},$$

где предполагается, что вес p измерен в килограммах, а радиус a в метрах.

Для данного снаряда величины i и C сами по себе являются постоянными, тогда как плотность воздуха μ может оставаться постоянной только при выстрелах с незначительной высотой поднятия снаряда. Но в современной баллистике приходится изучать также и выстрелы, при которых высота поднятия достигает нескольких километров. Тогда необходимо принимать во внимание изменение плотности μ с высотой и поэтому рассматривать сопротивление f как функцию не только от v, но и от высоты снаряда, так как μ изменяется с высотой [1]).

Наконец, что касается существенно положительной функции $F(v)$, то, даже отвлекаясь от всякого количественного предположения, надо иметь в виду (например, на основании диаграммы Сиаччи), что не только сама функция $F(v)$, но и отношение $\frac{F(v)}{v}$ постоянно возрастает вместе с v, откуда следует, что функция $F(v)$, постоянно возрастая, стремится к бесконечности вместе с v.

Таковы предпосылки основной задачи баллистики в ее наиболее общей постановке. Имея в виду в предстоящем изложении исследовать выстрелы, при которых высота не слишком велика, мы ограничимся упрощенным предположением $\mu=\text{const}$, т. е. будем считать сопротивление f зависящим только от v. При этом заметим, что все качественные результаты, которые мы получим в ближайших пп. 18—20, останутся в силе также и в случае закона сопротивления вида (26) при μ, изменяющемся с высотой, *лишь бы μ убывало при возрастании высоты полета снаряда.*

---

[1]) С этой целью см. две статьи E. Cavalli, озаглавленные „Il problema balistico dell'avvenire" в „*Riv. di Art. e Genio*", 1921—1922.

Последнее замечание: не делая предположения, что сопротивление f исчезает вместе со скоростью[1]), допустим, что $f(0) < g$. Это равносильно предположению, что сопротивление воздуха при скорости, равной нулю, оказывается меньше веса снаряда.

Отсюда вытекает непосредственное следствие, которым мы воспользуемся в дальнейшем. Так как непрерывная функция $f(v)$, так же как $F(v)$, стремится к бесконечности, всегда возрастая вместе с v, то это справедливо и для разности $f(v) - g$. Таким образом, из того, что эта разность при $v = 0$ отрицательна, мы заключаем, что она при изменении v от 0 до ∞ обращается в нуль только один раз. Обозначим через v_1 единственный конечный и положительный корень уравнения

$$f(v) - g = 0, \tag{27}$$

существование которого таким образом доказано.

14. Уравнение основной задачи. Если для простоты за единицу массы примем массу снаряда и обозначим через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ ускорение и скорость снаряда, через $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор скорости $\boldsymbol{v}$, через $\boldsymbol{g}$ — ускорение (вектор) силы тяжести, предполагая его постоянным, то уравнение основной задачи будет иметь вид

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} - f(v)\boldsymbol{t}. \tag{28}$$

Если начальная скорость $\boldsymbol{v}_0$ вертикальна или, в частности, равна нулю (снаряд, предоставленный самому себе без начального импульса на некоторой высоте), то движение благодаря полной симметрии будет прямолинейным и вертикальным, и его можно было бы изучить, исходя из соображений, аналогичных тем, которые были развиты для частного случая сопротивления, пропорционального квадрату скорости (§ 9 предыдущей главы).

Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда начальная скорось $\boldsymbol{v}_0$ не совпадает с вертикалью; сейчас же заметим на основе соображения о симметрии, подобного только что упоминавшемуся (которое, кроме того, можно было бы строго формулировать на основании уравнения (28)), что движение будет происходить в вертикальной плоскости, проходящей через начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$.

Фиксируем теперь систему отсчета. За начало O координатных осей возьмем место выстрела или, точнее, центр отверстия ствола орудия в момент выстрела. За ось x возьмем горизонтальную прямую в плоскости движения, направленную в сторону выстрела, за ось y — вертикаль, направленную вниз; далее обозначим через φ угол *наклона траектории*, т. е. угол между единичным вектором $\boldsymbol{t}$ (касательной к траектории в направлении движения) и осью x. Если предположим,

[1]) К этому допущению $f(0) \geqslant 0$ мы обращаемся лишь для того, чтобы не исключать биномиальные законы сопротивления типа $a + bv^n$, с постоянными положительными a, b, n.

принимая во внимание обычные условия стрельбы, что начальная скорость v_0 направлена вверх от горизонтальной плоскости, то начальное значение угла наклона φ будет определено заданием некоторого отрицательного угла $-\alpha$, где $0<\alpha<\pi/2$.

Уравнение (28) при проектировании на введенные таким образом оси x и y даст два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -f(v)\cos\varphi, \\ \ddot{y} &= g - f(v)\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{28'}$$

которые на основании соотношений

$$\dot{x} = v\cos\varphi, \quad \dot{y} = v\sin\varphi \tag{29}$$

можно написать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}\cos\varphi - v\dot{\varphi}\sin\varphi &= -f(v)\cos\varphi, \\ \dot{v}\sin\varphi + v\dot{\varphi}\cos\varphi &= g - f(v)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{v}$ и $v\dot{\varphi}$, найдем

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} &= g\sin\varphi - f(v), \\ v\dot{\varphi} &= g\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{28''}$$

При изучении основной задачи пользуются еще одним уравнением, которое выводится из предыдущих (28″). Заметим, что в начальный момент имеем $v \neq 0$, $\varphi \neq \pm\pi/2$ и, следовательно, во втором из уравнений системы (28″) производная $\dot{\varphi}$ конечна и не равна 0.

Пока сохраняют силу эти неравенства (а мы увидим, что это действительно будет иметь место в течение всего движения), первое из уравнений (28″) можно почленно разделить на второе, и мы получим уравнение

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{v}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi - \frac{f(v)}{g}\right), \tag{30}$$

которое можно написать в виде

$$\frac{d}{d\varphi}(v\cos\varphi) = -\frac{v}{g}f(v). \tag{30'}$$

15. Уравнение годографа. Уравнение (30) или (30′), определяющее величину скорости v снаряда в функции от наклона, называется в баллистике *уравнением годографа* [1]).

Важность этого уравнения в баллистических исследованиях вытекает из того, что, каков бы ни был количественный закон $f(v)$ сопротивления воздуха, достаточно, как увидим в п. 19, проинтегрировать это уравнение, чтобы свести задачу о движении снаряда к квадратурам.

[1]) Достаточно принять v и φ за радиус-вектор и угол полярных координат, чтобы видеть, что уравнение (30) для снаряда определяет траекторию движения по годографу (см. т. I, гл. VI, упражнение 26).

К сожалению, уравнение годографа удается проинтегрировать в конечном виде только при весьма частных предположениях относительно вида функции $f(v)$. Классическими являются случаи интегрируемости, указанные Даламбером в 1744 г. [1]),

$$f = a + b \ln v, \quad f = a + bv^n \quad (a \text{ и } b \text{ постоянные});$$

второе из этих соотношений, при $a = 0$, $n = 2$, содержит случай гидравлического сопротивления (гл. I, п. 22). Другие виды функции, для которых уравнение (30) оказывается интегрируемым, были указаны Сиаччи [2]). Недавно Драх (Drach) перечислил все случаи интегрируемости уравнения годографа [3]), а Данжуа (Denjoy) подверг эти случаи остроумному анализу, чтобы видеть, какие из них, хотя бы качественно, представляют движение в согласии с опытными данными [4]). Однако ни один из рассмотренных им случаев не способен представить закон сопротивления воздуха в достаточно широком интервале значений v с удовлетворительным приближением.

16. Замечание о баллистических таблицах. Из сказанного в предыдущем пункте следует, что пока сопротивление остается неопределенным или определено эмпирическим путем (диаграмма Сиаччи), уравнение годографа можно использовать при числовых подсчетах только для приближенного интегрирования.

Метод, теперь уже ставший классическим, был указан Сиаччи [5]). Он основывается: 1) на введении так называемой *псевдоскорости*

$$u = \frac{v \cos \varphi}{\cos \alpha},$$

отличающейся от горизонтальной составляющей скорости v снаряда только постоянным множителем (зависящим от начального наклона); 2) на том, что уравнение (30′) годографа становится интегрируемым в квадратурах, если в качестве аргумента подставить вместо v псевдоскорость u и затем принять, что

$$f(v) = \beta f(u) \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \theta},$$

где β считается постоянной. Хотя β (определяющаяся в действительности предшествующей подстановкой) изменяется при движении снаряда, однако мы увидим, что последнее предположение допустимо для достаточно коротких дуг траектории.

---

[1]) Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides (Paris); п. 356, стр. 380—383 нового издания, 1770 г.

[2]) Alcune nuove forme di resistenza, che riducono il problema balistico alle quadrature. *Riv. di Art. e Genio,* 1901, т. III, стр. 5—25; т. IV, стр. 5—22, 165—189.

[3]) См. изложение исследований Данжуа в упоминавшемся уже трактате Шарбоннье, т. I, стр. 497—514.

[4]) Там же, стр. 514—519.

[5]) Сиаччи, цит. соч., ч. I, гл. IV.

Представляя себе траекторию разбитой на такие дуги и располагая на каждой дуге выбором постоянной β, мы можем принять во внимание также и изменение плотности воздуха с высотой.

Отправляясь от определенных начальных условий, можно строить интегралы так, чтобы положение и скорость были согласованы при переходе от одной частичной дуги (вдоль которой β рассматривается как постоянная) к следующей. Результаты численного подсчета собираются затем в таблицы, в которых табулируются четыре функции от псевдоскорости u [1]).

17. То обстоятельство, что в общем случае мы не умеем интегрировать в конечном виде уравнение годографа, естественно, приводит к аналогичной невозможности решения системы дифференциальных уравнений (28″) главной задачи. Поэтому за отсутствием (строгих) количественных результатов мы вынуждены удовлетвориться качественным изучением (но с полной математической строгостью) поведения любого интеграла этой системы.

Такое изучение предполагает, что интеграл, соответствующий заданным начальным условиям, существует и является вполне определенным, по крайней мере внутри известного множества значений независимой переменной и неизвестных функций. Известно, что для систем дифференциальных уравнений нормального типа теорема существования и единственности интеграла имеет место, вообще говоря, только внутри тех множеств значений независимого переменного и неизвестных функций, в которых правые части остаются правильными *) функциями.

Наша система (28″) после приведения к нормальной форме принимает следующий вид:

$$\dot{v} = g \sin\varphi - f(v), \quad \dot{\varphi} = \frac{g}{v}\cos\varphi.$$

Требование правильности будет удовлетворено при условии, что скорость остается отличной от нуля. Поэтому мы прежде всего должны убедиться, выполняется ли и в каких интервалах это ограничение. С этой целью мы не обратимся сразу к системе (28″), а начнем с уравнения годографа (30) и, качественно изучив предварительно какой-нибудь его интеграл, придем затем путем обычного исключения к выяснению поведения соответствующего интеграла системы (28″).

Чтобы ориентироваться в выборе интервала, внутри которого надлежит рассматривать независимое переменное φ уравнения (30),

---

[1]) Кроме трактата Сиаччи, см. работу Бианки, тоже упоминавшуюся на стр. 112, часть I, гл. VI.

*) Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений (1945), стр. 128, 129. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (1950), стр. 72 и сл. *(Прим. ред.)*

мы начнем с какого-нибудь вывода, имеющего предварительный наводящий характер, и подтвердим этот вывод строгим путем в последующих рассуждениях.

Допустим, как это оказывается возможным на основании предположения о правильности, что движение снаряда остается правильным в течение всего времени движения в том смысле, что траектория во всякой ее точке имеет конечную и отличную от нуля кривизну $1/r$ и что такой же (т. е. конечной и отличной от нуля) остается также и скорость v. В этом предположении рассмотрим натуральное уравнение, получающееся путем проектирования векторного уравнения (28) на главную нормаль траектории, т. е. уравнение

$$\frac{v^2}{r} = F_n, \tag{31}$$

где F_n означает центростремительную *существенно положительную* составляющую действующей силы. В нашем случае эта действующая сила состоит из силы тяжести и сопротивления воздуха, а так как эта последняя, как касательная, ничего не прибавляет к F_n, то мы видим, что во все время движения должна оставаться положительной составляющая веса по направлению главной нормали, направленной к центру кривизны. Иными словами, угол главной нормали к траектории, направленной к центру кривизны, с нисходящей вертикалью должен оставаться острым, т. е. траектория в любой своей точке вогнутостью должна быть обращена вниз, и угол наклона φ, начиная от начального значения $-\alpha > -\pi/2$, должен всегда возрастать, никогда, однако, не превосходя значения $\pi/2$.

18. Качественное поведение любого интеграла уравнения годографа. Рассмотрим интеграл $v(\varphi)$, определяемый единственным начальным условием, что $v = v_0$ при $\varphi = -\alpha > -\pi/2$, и, руководствуясь выводами предыдущего пункта, будем изменять наклон φ от $-\alpha$ до $\pi/2$. Так как во всем этом интервале, за исключением верхней границы, правая часть уравнения (30) остается правильной (для какого угодно конечного значения v), то таким же будет и интеграл $v(\varphi)$, лишь бы только было известно, что он остается конечным. Действительно, мы докажем даже несколько больше этого, а именно, что *во всем этом интервале функция $v(\varphi)$ остается всегда меньше некоторого конечного числа W и больше некоторого числа w, большего нуля* [1]).

Чтобы доказать первую часть, прежде всего заметим, что из уравнения (30) следует, что при изменении φ от $-\alpha$ до 0 производная $dv/d\varphi$ остается отрицательной, так что v, постоянно убывая, остается всегда меньше своего начального значения v_0. С другой

[1]) A. Signorini, Sulla velocità minima, *Rend. Acc. Lincei*, серия 5, т. **31** (1922), стр. 101—104.

стороны, для остальной части интервала, от 0 до $\pi/2$, из того же уравнения (30) следует, что при возрастании v, когда $dv/d\varphi > 0$, отношение $f(v)/g$ должно соответственно получиться меньше $\sin\varphi$ и, следовательно, меньше единицы, т. е.

$$f(v) - g < 0.$$

Отсюда на основании возрастания функции $f(v)$ и предположения $f(0) < g$ следует, что скорость v должна оставаться меньше единственного положительного корня v_1 (п. 13) уравнения (27)

$$f(v) - g = 0;$$

поэтому, если W есть большее из двух чисел v_0 и v_1, то во всем интервале от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$ мы будем иметь

$$v < W. \tag{32}$$

Чтобы доказать, что v в том же интервале допускает нижний предел, отличный от нуля, будем вести доказательство от противного, предположив, что такой нижний предел равен нулю. Представим себе, что независимое переменное φ возрастает от $-\alpha$ до $\pi/2$. Тогда или функция $v(\varphi)$ не обращается в нуль при значениях $\varphi < \pi/2$, или же встретится первое значение φ_1 угла наклона, при котором $v(\varphi_1) = 0$; в этом втором случае будем иметь $v(\varphi) > 0$ при всяком $\varphi < \varphi_1$. Во всяком случае, если бы нуль был нижним пределом функции $v(\varphi)$, то существовали бы значения $\bar{\varphi}$ переменной φ, для которых функция $\bar{v} = v(\bar{\varphi})$ сделалась бы сколь угодно малой и, в частности, меньше положительного числа w, определяемого равенством

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{v_0 \cos\alpha} + \frac{f(W)}{gW}(1 + \operatorname{tg}\alpha). \tag{33}$$

В интервале от $-\alpha$ до $\bar{\varphi}$ функция $v(\varphi)$ не обращается в нуль, и поэтому равенство (30′) можно написать в виде

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v},$$

откуда на основании того, что функция $f(v)/v$ является возрастающей, и на основании равенства (32) имеем

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} \leqslant \frac{f(W)}{W};$$

разделив обе части на $\cos^2\varphi$, получим

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{v\cos\varphi}\right) \leqslant \frac{f(W)}{gW}\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi.$$

Интегрируя теперь от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \bar{\varphi}$ и умножая на положительное число $\cos\bar{\varphi}$, получим при $\bar{v} = v(\bar{\varphi})$ неравенство

$$\frac{1}{\bar{v}} \leqslant \frac{\cos\bar{\varphi}}{v_0\cos\alpha} + \frac{f(W)}{gW}(\sin\bar{\varphi} + \operatorname{tg}\alpha\cos\bar{\varphi}).$$

Так как $v_0 \cos\alpha$, $f(W)/W$, $\operatorname{tg}\alpha$ суть какие-то положительные числа, то правая часть увеличится, если $\sin\bar{\varphi}$ и $\cos\bar{\varphi}$ заменить единицей. Сравнивая с равенством (33), заключаем, что

$$\bar{v} > w$$

вопреки предположению, что

$$\bar{v} < w.$$

Таким образом, не только исключена возможность, что v исчезнет между $-\alpha$ и $\pi/2$, но также еще и доказано, что в этом интервале (за исключением лишь $\varphi = \pi/2$) она остается бо́льшей числа

$$w > 0.$$

19. Определение и качественное изучение общего интеграла основной задачи. На основании результатов предыдущего пункта можно строго установить, что, начиная от заданных начальных условий, функции $\varphi(t)$, $v(t)$, составляющие общее решение уравнений (28″) основной задачи, остаются конечными и непрерывными, вместе с их производными, при изменении времени t от начального своего значения до бесконечности. Этот вывод о характере правильности общего решения (28″) из аналогичного свойства уравнения (30) годографа непосредственно следует из того обстоятельства, уже указанного в п. 15, что если известен какой-нибудь интеграл уравнения (30), то соответствующий интеграл уравнений (28″) получится посредством только одной квадратуры (с последующими возможными исключениями).

Начнем со второго уравнения системы (28″) и будем рассматривать в нем v как такую функцию от φ, которая определяется из уравнения (30) на основании обычного начального условия $v = v_0$ при $\varphi = -\alpha$. Так как $\cos\varphi$ между $-\alpha$ и $\pi/2$ уже не обращается в нуль, то это уравнение в таком интервале эквивалентно уравнению

$$dt = \frac{v\,d\varphi}{g\cos\varphi}; \tag{34}$$

поскольку в том же интервале v остается больше $w > 0$ (предыдущий пункт), это уравнение определяет t как функцию $f(\varphi)$, всегда возрастающую от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$. Более того, интегрируя от начального значения $-\alpha$ до любого φ, мы получим

$$t - t_0 = \int_{-\alpha}^{\varphi} \frac{v\,d\varphi}{g\cos\varphi}.$$

Так как всегда имеем $v > w > 0$ и $1/\cos\varphi$ при $\varphi \to \pi/2$ становится бесконечностью первого порядка, то мы видим, что $t(\varphi)$ стремится к бесконечности, всегда возрастая, когда φ стремится к $\pi/2$. Отсюда следует, что, обратно, φ есть вполне определенная монотонная функция от t, которая изменяется, всегда возрастая, от $-\alpha$ до $\pi/2$ при возрастании t от своего начального значения t_0 до бесконечности. Достаточно подставить эту функцию $\varphi(t)$ в найденный интеграл $v(\varphi)$ уравнения (30), чтобы получить функцию $v(t)$, производная от которой $\dot{v} = dv/d\varphi\ \dot{\varphi}$ удовлетворит на основании того же уравнения (30) первому из уравнений системы (28″).

Наконец, обе функции: $\varphi(t)$ и $v(t)$, определенные таким образом, удовлетворяют системе (28″); при $t = t_0$ они принимают заданные значения $\varphi = -\alpha$, $v = v_0$ и обе остаются правильными при возрастании t от t_0 до бесконечности. Так как, далее, во всем этом интервале существует условие $v > w > 0$, обеспечивающее возможность применения теоремы единственности (помимо теоремы существования интеграла для системы (28″) (п. 17), то таким образом движение снаряда охарактеризовано однозначно. В частности, мы получили при этом следующие результаты: 1) касательная к траектории (ориентированная в сторону движения) вращается всегда в одном и том же направлении, стремясь стать в вертикальное положение при $t \to \infty$; 2) скорость допускает отличный от нуля минимум.

Из последнего вывода следует, что снаряд движется по траектории постоянно в одну и ту же сторону, поэтому, если мы обозначим через s криволинейную абсциссу снаряда, отсчитываемую в сторону движения от произвольного начала, так что будем иметь $v = ds/dt$, то в *течение всего времени движения* можно принять за независимую переменную дугу s и придать равенству (34) вид

$$v^2 \frac{d\varphi}{ds} = g \cos \varphi. \qquad (34')$$

Вспомним теперь, что для любой плоской кривой $d\varphi/ds$ представляет кривизну с соответствующим знаком, т. е. $1/r$ или $-1/r$ (где r — радиус кривизны), смотря по тому, составляет или нет касательная, направленная в сторону возрастания s, и нормаль, направленная к центру кривизны, систему осей, одинаково ориентированную с осями координат (т. I, гл. XIV, п. 50). Так как в нашем случае величина $d\varphi/ds$ на основании соотношения (34′) при каком угодно конечном значении t будет положительной, то можно заключить, что угол между нормалью, направленной к центру кривизны траектории снаряда, и вертикалью y, направленной вниз, в любой момент будет равен углу наклона φ, который постоянно будет острым, так что траектория в любой своей точке вогнутостью обращена вниз. Кроме того, из равенства (34′) на основании неравенства $v < W$ (п. 18) получим, что кривизна в точке, соответствующей любому наклону φ, будет наверное больше $g \cos \varphi / W^2$.

Таким образом, выводы из естественного уравнения движения (31), п. 17, допускавшие a priori, что в течение всего движения скорость снаряда и кривизна траектории остаются конечными и отличными от нуля, оказываются строго обоснованными.

Здесь уместно сделать еще следующее замечание: если функции $\varphi(t)$, $v(t)$ известны, то *кинематические уравнения* движения, т. е. соответствующие выражения для x и y как функции от t, можно получить двумя квадратурами на основании хорошо известных соотношений (29). Есле же, наоборот, предполагается известным только интеграл $v(\varphi)$ уравнения годографа и требуется получить выражения для x и y в функциях от угла наклона φ, то удобно воспользоваться двумя уравнениями, которые получатся после исключения dt из уравнений (29) и второго из уравнений системы (28″), т. е. уравнениями

$$dx = \frac{v^2}{g}\,d\varphi, \quad dy = \frac{v^2 \operatorname{tg}\varphi}{g}\,d\varphi. \tag{35}$$

Этими уравнениями мы скоро воспользуемся.

20. Влияние сопротивления воздуха на движение снаряда. Если мы примем во внимание полученные таким образом свойства движения снаряда, то из уравнений движения (из уравнений (30′), (29) и из теоремы живых сил) можно тотчас же вывести некоторые следствия, которые выявляют глубокие изменения в этом движении, вызываемые сопротивлением воздуха, по сравнению с движением, которое имело бы место в пустоте (т. I, гл. II, § 6).

Прежде всего из уравнения (30′) и из того обстоятельства, что v остается всегда больше $w > 0$, мы видим, что *горизонтальная составляющая $v \cos\varphi$ скорости снаряда есть функция всегда убывающая* (между тем как в пустоте, как мы уже знаем, она оставалась бы постоянной).

Далее, так как во время движения наклон φ, начиная от значения $-\alpha$, стремится, постоянно возрастая, к $\pi/2$, то на траектории в некоторый определенный момент времени встретится точка V, *в которой касательная горизонтальна* ($\varphi = 0$). Эта точка или *вершина* делит траекторию на две дуги. Дугу OV мы будем называть восходящей, другую дугу — нисходящей.

Докажем теперь, что *если точки P_1, P_2 траектории находятся на одинаковой высоте и лежат по разные стороны от вершины V, то*:

а) *наклон (отрицательный) φ_1 в точке P_1 по абсолютной величине меньше наклона φ_2* в P_2 (тогда как в пустоте было бы $|\varphi_1| = \varphi_2$);

б) *расстояние от вершины V (как по хорде, так и по траектории) до P_1 больше, чем до P_2* (в пустоте P_1 и P_2 были бы на одинаковом расстоянии от V);

в) *вертикальная составляющая скорости (отрицательная)* $\dot{y}_1 = v_1 \sin\varphi_1$ в P_1 *по абсолютной величине больше аналогичной составляющей* $\dot{y}_2 = v_2 \sin\varphi_2$ *в* P_2 (в пустоте было бы $|\dot{y}| = \dot{y}_2$);

г) *модуль скорости* v_1 *в* P_1 *больше модуля скорости* v_2 в P_2 (в пустоте было бы $v_1 = v_2$).

Для доказательства утверждения а) возьмем второе уравнение системы (35), которое можно написать в виде

$$\operatorname{tg}\varphi d \operatorname{tg}\varphi = \frac{g dy}{v^2 \cos^2\varphi}.$$

Если обозначим через $\bar{y}$ ординату вершины V, через y_1 — ординату точек P_1 и P_2, то, интегрируя от V до P_1 и от V до P_2, получим

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi_1 = g\int_{\bar{y}}^{y_1} \frac{dy}{v^2\cos^2\varphi}, \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi_2 = g\int_{\bar{y}}^{y_1} \frac{dy}{v^2\cos^2\varphi}.$$

Так как интегралы берутся между одинаковыми пределами, а функция $v\cos\varphi$ является убывающей, то подинтегральная функция в первом интеграле всюду меньше, чем во втором, и мы получаем

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 < \operatorname{tg}^2\varphi_2$$

и, следовательно,

$$|\varphi_1| < \varphi_2.$$

Далее, чтобы доказать, что и для хорд справедливо неравенство $P_1V > VP_2$, заметим, что так как точки P_1 и P_2 имеют равные ординаты, то достаточно показать, что если x_1, x_2 и $\bar{x}$ суть соответственно абсциссы точек P_1, P_2, V, то будем иметь

$$\bar{x} - x_1 > x_2 - \bar{x}.$$

С этой целью заметим, что так как

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}\varphi},$$

то имеем

$$\bar{x} - x_1 = \int_{y_1}^{\bar{y}} \frac{dy}{\operatorname{tg}|\varphi|}, \quad x_2 - \bar{x} = \int_{\bar{y}}^{y_1} \frac{dy}{\operatorname{tg}\varphi},$$

где в первом интеграле $|\varphi|$ отсчитывается вдоль восходящей дуги P_1V, во втором φ — вдоль нисходящей дуги VP_2. Так как элементы обоих интегралов все положительны, и в силу неравенства $|\varphi_1| < \varphi_2$ всякий элемент первого больше того элемента второго, который соответствует той же самой высоте y, то действительно имеем

$$\bar{x} - x_1 > x_2 - \bar{x}.$$

Подобным же образом, если вместо хорд будем рассматривать дуги траектории $\overset{\frown}{VP_1}$, $\overset{\frown}{VP_2}$, определяемые соответственно равенствами

$$\overset{\frown}{VP_1}=\int_{\bar{y}}^{y_1}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}\,dy,\quad \overset{\frown}{VP_2}=\int_{\bar{y}}^{y_2}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}\,dy,$$

то непосредственно увидим, что $\overset{\frown}{VP_1}>\overset{\frown}{VP_2}$, если примем во внимание, что в точках с равной высотой, взятых одна на восходящей дуге, а другая на нисходящей, в силу теоремы а) первый радикал больше второго.

Чтобы доказать утверждение в), возьмем снова второе из уравнений (28′), умножим обе части на dy и примем во внимание, что $\dot{y}=v\sin\varphi$ и что $d(\dot{y}^2)=2\ddot{y}\,dy$. В силу этого получим

$$d(\dot{y}^2)=2g\,dy-2f(v)\,v\sin^2\varphi\,dt.$$

Интегрируя между двумя моментами t_1 и t_2, соответствующими прохождению снаряда через точки с равной высотой P_1, P_2, мы получим нуль от первого члена правой части и существенно отрицательный интеграл от второго, так что будем иметь

$$\dot{y}_2^2-\dot{y}_1^2<0.$$

Отсюда и из замечания, сделанного вначале о том, что горизонтальная составляющая скорости всегда убывает, непосредственно следует утверждение г), т. е. неравенство $v_1>v_2$. Это последнее можно получить и прямо из теоремы живых сил, если заметить, что при движении от точки P_1 до точки P_2, находящейся на той же высоте, работа силы тяжести равна нулю, тогда как работа пассивного сопротивления на основании свойства самой силы отрицательна: поэтому отрицательным будет также и изменение живой силы, т. е.

$$\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2).$$

21. Минимальная скорость и предельная скорость. Интересно, далее, уточнить, как изменяется вдоль траектории под действием сопротивления $f(v)$ скорость снаряда; необходимо, однако, заметить, что результаты, к которым мы придем, в отличие от результатов двух предыдущих пунктов (которые сохраняют свою силу при всяком законе сопротивления общего типа (26)) основаны на том, что сопротивление не зависит от высоты снаряда.

Возьмем снова уравнение годографа (30) и напишем его в форме

$$\frac{dv}{d\varphi}=(g\sin\varphi-f(v))\,\frac{v}{g\cos\varphi}. \qquad (30'')$$

Как уже было отмечено в п. 18, правая часть при $-\alpha \leqslant \varphi \leqslant 0$ остается отрицательной, так что вдоль восходящей дуги скорость всегда убывает. В вершине ($\varphi = 0$) скорость приобретает некоторое значение v^*, наверное положительное (п. 18), тогда как ее производная на основании уравнения (30″) принимает отрицательное значение (не равное нулю)

$$-\frac{v^* f(v^*)}{g}.$$

Поэтому производная $\frac{dv}{d\varphi}$ в вершине будет все еще отрицательной и такой же будет оставаться и за вершиной, по крайней мере на некотором участке нисходящей дуги, т. е. именно до тех пор, пока не обратится в нуль; если случится, что производная $\frac{dv}{d\varphi}$ при некотором значении $\bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}$ будет равна нулю, то скорость v, остающаяся во всем интервале от $-\alpha$ до $\pi/2$ большей $w > 0$ (п. 18), при $\varphi = \bar{\varphi}$ должна будет принять некоторое значение $\bar{v}$ *необходимо положительное,* для которого мы будем иметь

$$g \sin \bar{\varphi} - f(\bar{v}) = 0. \tag{36}$$

Более того, всякое значение $\bar{v}$ скорости v, при котором $\frac{dv}{d\varphi}$ обращается в нуль, может быть только *минимумом,* так как если в выражении производной (30″) положим $\varphi = \bar{\varphi}$, $v = \bar{v}$, $\frac{dv}{d\varphi} = 0$ и примем во внимание соотношение (36), то найдем

$$\left(\frac{d^2 v}{d\varphi^2}\right)_{\varphi = \bar{\varphi}} > 0.$$

На основании непрерывности v легко убедиться, что может осуществиться только одна из следующих двух возможностей: 1) скорость v, начиная от своего начального значения v_0, убывает до минимума $\bar{v}$, которого она достигает при наклоне $\bar{\varphi} > 0$, т. е. в некоторой точке нисходящей дуги, после чего при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, т. е. при бесконечном возрастании времени, она будет постоянно возрастать; 2) скорость, начиная от своего начального значения, постоянно убывает.

Покажем, что при указанных предположениях для сопротивления $f(v)$ вторая возможность должна быть исключена[1]).

Для этого полезно прежде всего изучить поведение скорости при стремлении φ к $\pi/2$. Так как в силу только что сказанного

---

[1]) Siacci, Sulla velocità minima, *Riv. di Art. e Genio,* XVIII ежегодник, т. I, II. См. также Signorini, сочинение, упоминавшееся на стр. 102.

скорость v или всегда убывает, или в конце концов становится всегда возрастающей, а, с другой стороны, при изменении φ от $-\alpha$ до $\pi/2$ остается всегда заключенной между w и W (п. 18), то она во всяком случае при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ должна стремиться к такой *предельной скорости* v_l, чтобы

$$w \leqslant v_l \leqslant W.$$

Теперь мы непосредственно устанавливаем, что эта предельная скорость v_l является как раз единственным конечным и положительным корнем v_1 уравнения (27)

$$f(v) - g = 0.$$

Действительно, если бы было

$$f(v_l) - g \neq 0,$$

то производная $dv/d\varphi$, как это следует из уравнения (30″), обращалась бы при $\varphi = \pi/2$ в бесконечность первого порядка, что противоречит уже подтвержденному выводу, что предельная скорость является конечной (не большей W).

Второй из двух указанных выше случаев, допущенный только как возможный a priori (случай постоянно убывающей скорости v) при всяком наклоне φ, заключенном между $-\alpha$ и $\pi/2$, приводил бы к неравенству

$$v > v_1. \tag{37}$$

Легко видеть, однако, что это неравенство не может сохранить своей силы во всем интервале от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$. Действительно, поступая так, как в п. 18, напишем уравнение годографа в виде

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v}.$$

Принимая во внимание, что отношение $\frac{f(v)}{v}$ возрастает с возрастанием скорости и $v > v_1$, найдем

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v} > \frac{f(v_1)}{v_1}.$$

Заменив теперь $f(v_1)$ через g, получим

$$-\frac{1}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} > \frac{1}{v_1}$$

или же, разделив обе части на $\cos^2\varphi$,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{v\cos\varphi}\right) > \frac{1}{v_1}\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi.$$

Если теперь проинтегрируем это неравенство от $-\alpha$ до любого $\varphi<\pi/2$ и умножим обе части на положительное число $\cos\varphi$, то получим

$$\frac{1}{v}>\frac{\cos\varphi}{v_0\cos\alpha}+\frac{1}{v_1}\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Достаточно взять φ в интервале $\pi/2-2\alpha<\varphi<\pi/2$, для того чтобы дробь $\sin(\varphi+\alpha)/\cos\alpha$ была больше единицы, а следовательно, чтобы существовало более сильное неравенство

$$\frac{1}{v}>\frac{1}{v_1},$$

что явно противоречит (37).

Поэтому можно заключить, что *скорость снаряда, достигнув своего (положительного) минимума за вершиной траектории, начинает снова возрастать и стремится к конечной предельной скорости,* определяемой уравнением (27) (тогда как в пустоте она достигла бы минимума в вершине и затем, возрастая, стремилась бы к бесконечности).

22. Вертикальная асимптота траектории. Выводы предыдущего пункта вместе с выводами п. 18 позволяют доказать, что *траектория снаряда имеет вертикальную асимптоту.*

С этой целью снова возьмем первое из уравнений (35), п. 19

$$dx=\frac{v^2}{g}\,d\varphi;$$

так как величина v остается конечной, то функция v^2/g интегрируема от $-\alpha$ до $\varphi=\pi/2$, так что x при $\varphi\to\pi/2$ стремится к конечному и определенному пределу x_1. С другой стороны, из второго из упомянутых уравнений (35), т. е. из уравнения

$$dy=\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi,$$

следует

$$\frac{dy}{d\varphi}>\frac{\bar v^2}{g}\operatorname{tg}\varphi,$$

так как, начиная от $\varphi=\bar\varphi$, имеем $v>\bar v$. Но интеграл от функции в правой части стремится к бесконечности, если φ стремится к $\pi/2$; то же должно произойти и с интегралом от $dy/d\varphi$, т. е. с ординатой y.

Поэтому заключаем, что прямая $x=x_1$ действительно представляет асимптоту для траектории (тогда как в пустоте при движении точки вдоль траектории ее абсцисса x стремилась бы к бесконечности вместе с y).

23. Замечания о вторичных задачах внешней баллистики. Как уже было сказано, качественные результаты, установленные в пп. 18—20 для основной задачи внешней баллистики в предположении, что сопротивление f зависит только от скорости v снаряда, остаются в силе также и при законах сопротивления, в которых вместе с плотностью воздуха входит высота снаряда согласно общей формуле (26). Даже и в этом случае, так как скорость v не опускается ниже некоторого положительного минимума, дифференциальное уравнение (28) основной задачи может быть написано в форме

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{v} f(y, v)\boldsymbol{v}. \tag{28a}$$

Но этой основной задачей не исчерпываются вопросы, которые выдвигает перед исследователями современная баллистика. Помимо веса снаряда и сопротивления воздуха, которые учитываются в этой задаче, иногда приходится принимать во внимание и другие физические обстоятельства (хотя бы для того, чтобы убедиться, в каких пределах приближения можно от них отвлечься), так как в действительности они все же влияют на движение снаряда. Эти последние факторы, хотя и являются ощутительными, все же оказываются менее важными в сравнении с основными, т. е. с силой тяжести и сопротивлением воздуха, и называются *вторичными* факторами, а вторичными задачами называются те задачи, которые возникают при учете и механической схематизации этих вторичных воздействий.

Общий прием, которым пользуются при количественной оценке влияния вторичных факторов, по существу тот же самый, что и классический метод небесной механики, называемый *методом возмущений* (§ 5).

Чтобы дать пример этого метода в интересующей нас баллистической задаче, представим отнесенную к единице массы результирующую вторичных факторов в виде некоторого вектора $\boldsymbol{\Psi}$, который следует принять за известную функцию положения P снаряда и его скорости $\boldsymbol{v}$. В качестве основного положения, вытекающего из природы задачи, допустим, что модуль Ψ вектора $\boldsymbol{\Psi}$ настолько мал по сравнению с силами главной задачи и, в частности, по сравнению с g, что его можно рассматривать как величину первого порядка малости по сравнению с ними. Точнее, мы будем считать, следуя алгоритму бесконечно малых, как вектор $\boldsymbol{\Psi}$, так и его частные производные по различным аргументам, от которых он зависит, бесконечно малыми первого порядка.

Дифференциальное уравнение вторичной задачи

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{v} f(y, v)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Psi}(P, \boldsymbol{v}) \tag{38}$$

определяет для снаряда движение, которое в противоположность движению, изученному в основной задаче, называется *возмущенным*, причем вторичное действие $\boldsymbol{\Psi}$ называется *возмущающей силой*. Необходимо теперь же предупредить, что, как это подсказывается и самой задачей, всякое частное возмущенное движение, определяемое заданными начальными условиями, сравнивается с невозмущенным движением, соответствующим тем же начальным условиям.

Предположим теперь, что общее решение основной задачи, т. е. решение уравнения (28″), предварительно определено, например взято из таблиц (п. 16); обозначая через $P^*(t)$, $\boldsymbol{v}^*(t)=\dot{P}^*$, $a^*(t)=\dot{v}^*$ геометрические или векторные функции, представляющие это решение, примем, что искомое решение уравнения (38) имеет вид

$$P=P^*+\delta P, \quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^*+\delta\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^*+\delta \boldsymbol{a}. \tag{39}$$

В соответствии со сделанным предположением относительно модуля возмущающей силы $\boldsymbol{\Psi}$ и относительно ее производных, предположим, что модули δP, $\delta\boldsymbol{v}$, δa (возмущения величин P, $\boldsymbol{v}$ и a) можно рассматривать как величины первого порядка малости. Важно отметить, что в силу только что установленного соглашения относительно начальных условий возмущенного движения и соответствующего невозмущенного движения, возмущения δP, $\delta\boldsymbol{v}$, δa в начальный момент можно будет положить равными нулю.

Подставим выражения (39) в (38) и примем во внимание, что на основании уравнения (28а) имеем

$$\boldsymbol{a}^*=\boldsymbol{g}-\frac{1}{v^*}f^*\boldsymbol{v}^*,$$

где через f^* временно обозначен результат подстановки v^* и y^* вместо v и y в f.

Таким образом, с точностью по крайней мере до членов второго порядка, получим уравнение

$$\delta \boldsymbol{a}=-\frac{1}{v^*}f^*\,\delta\boldsymbol{v}+ \\ +\left\{\frac{\partial}{\partial v^*}\left(\frac{1}{v^*}f^*\right)\delta v+\frac{1}{v^*}\frac{\partial f^*}{\partial y}\,\delta y\right\}\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{\Psi}(P^*, v^*). \tag{40}$$

Но из равенства $v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$, после дифференцирования и разрешения относительно δv, получим

$$\delta v=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}}{v}.$$

Полагая

$$\delta y=\eta, \quad \delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\nu}, \quad \delta\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\nu}}$$

и обозначая через ν_1, ν_2, ν_3 составляющие вектора $\boldsymbol{\nu}$ по трем осям x, y, z, найдем для возмущения η функции y соотношение

$$\dot{\eta}=\nu_2. \tag{41}$$

С другой стороны, уравнение (40), если для простоты отбросить звездочки, можно переписать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -h\boldsymbol{\nu} + \{h_1 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} + h_2\eta\}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi}, \tag{42}$$

где положено

$$\left.\begin{array}{c} h = \frac{1}{v} f, \quad h_1 = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v} f\right), \quad h_2 = \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Psi}(P, \boldsymbol{v}), \end{array}\right\} \tag{43}$$

причем предполагается, что в h, h_1, h_2 и $\boldsymbol{\Phi}$ вместо $\boldsymbol{v}$ и координат точки P подставлены их выражения в функции времени, которые получены при предварительном интегрировании основной задачи.

Следовательно, скаляры h, h_1, h_2 и вектор $\boldsymbol{\Phi}$ представляют собой известные функции времени. Уравнения (41) и (42), из которых второе надо спроектировать на три оси, дают четыре линейных неоднородных уравнения с четырьмя неизвестными функциями η, ν_1, ν_2, ν_3 вторичной задачи (в первом приближении). Коэффициенты этих уравнений представляют собой известные функции t.

Заметим при этом, что если область, в которой мы рассматриваем влияние возмущающей силы, по высоте достаточно ограничена, для того чтобы можно было пренебречь изменением плотности воздуха с высотой, то сопротивление f можно рассматривать не зависящим от y, так что из третьего из уравнений (43) получим $h_2 = 0$. В этом случае равенство (42) не будет содержать неизвестную η; в него будет входить только $\boldsymbol{\nu}$, и достаточно будет проинтегрировать три линейных дифференциальных уравнения с тремя неизвестными функциями ν_1, ν_2, ν_3, к которым оно приводит, чтобы затем иметь возможность определить посредством квадратур также и $\eta = \delta y$ и, если угодно, δx и δz, т. е. по существу вариацию δP положения снаряда.

Во всяком случае, как это всегда имеет место в случае линейной неоднородной дифференциальной системы, интегрирование уравнений (41) и (42) сводится только к квадратурам всякий раз, когда удается каким-либо способом определить общий интеграл соответствующей однородной системы. В настоящем случае член $\boldsymbol{\Phi}$ уравнения (42), делающий уравнение неоднородным, объединяет в себе все, что относится к возмущающей силе. С другой стороны, однородная система, зависящая исключительно от уравнения (28″) основной задачи, дает в силу этого последнего уравнения так называемые *уравнения в вариациях*, которыми мы будем заниматься в общем случае в § 5 гл. VI. Мы увидим тогда, что если известен общий интеграл какой-нибудь дифференциальной системы, то из него можно получить посредством одного только дифференцирования общий интеграл соответствующих уравнений в вариациях. Применяя к нашему случаю это замечание и вспоминая сказанное ранее относительно линейных неоднородных систем, можно утверждать, что, по крайней мере теоретически, знание общего интеграла основной задачи позволяет разрешить (в первом приближении) путем дифференцирования и последующих квадратур также и вторичные задачи.

Относительно природы самой основной задачи здесь нужно сделать одно существенное замечание. Вспомним, что если мы исключим частные законы сопротивления, плохо соответствующие действительности, то не сможем найти интегралы основной задачи точно, а определим их только приближенно, выводя из баллистических таблиц. Если некоторая функция определена посредством графика, вычерченного непрерывно механическими средствами или полученного путем графической интерполяции из какого-нибудь разрывного ряда точек, заданного в виде числовых таблиц, то интегрирование можно будет выполнить при помощи подходящих способов суммирования, с приближением, сравнимым с тем, которое имело место при построении графика. Наоборот, операция дифференцирования, поскольку требуется, чтобы от точки к точке оценивалось направление касательной, порождает неуверенность в том, что мы не придем таким путем к значительно бóльшим ошибкам. Поэтому в баллистическом случае нельзя прийти к приемлемым результатам, выводя общий интеграл уравнений (41) и (42) из интеграла основной задачи через интегралы соответствующих однородных уравнений (в вариациях). В этом случае лучше прямо получить последний интеграл, применяя к однородным уравнениям те же самые способы табличных и графических приближений, которые служат для решения основной задачи.

Мы не будем заниматься длинными рассуждениями о действительном применении этих критериев и ограничимся перечислением наиболее важных вторичных задач, встречающихся в баллистике. Эти задачи можно разделить на три типа в соответствии с тремя следующими возмущающими действиями:

1) *Ветер*, для динамического истолкования которого как определенной силы $\Psi(P, \mathbf{v})$ еще не найдено окончательной механической схемы, так как различные эмпирические формулы, предложенные до сих пор, представляют собой предмет постоянного спора между исследователями в области баллистики.

2) *Гравитационное поле*. В основной задаче поле силы рассматривается однородным, и в векторе $\mathbf{g}$ объединяются и притяжение к Земле, и центробежная сила (т. I, гл. XVI, § 7). В действительности же, в силу ли формы Земли или в силу неоднородного распределения ее масс необходимо присоединить к $\mathbf{g}$ поправочный член, представляющий собой производную от некоторого потенциала U_1, при вычислении которого можно ограничиться членами второго порядка малости в соответствии с тем, что при

постановке вторичной задачи ограничиваются малыми первого порядка. В этом случае мы имеем (консервативную) возмущающую силу Ψ, зависящую исключительно от P через посредство потенциала U_1.

3) *Вращение Земли,* которое учитывается введением в правую часть уравнения (38) в виде возмущающей силы Ψ сложной центробежной силы, отнесенной к единице массы,

$$-2\omega \times v,$$

где ω означает угловую скорость вращения Земли. Естественно, что в этом случае в равенстве (42) вектору $\Phi(t)$ надо приписать значение, получающееся из указанной сложной центробежной силы, если в выражении этой последней за вектор v принять скорость снаряда, которую он имел бы в невозмущенном движении (интеграл основной задачи).

Вторичными задачами, которые возникают из этого типа возмущений, мы займемся в § 5.

§ 4. Влияние вращения Земли на движение тяжелого тела в пустоте

24. В предыдущем параграфе (так же как и при изучении движения тяжелого тела, рассматривавшегося с кинематической точки зрения в § 6 гл. II т. I) совершенно не принималось во внимание движение Земли, и основное уравнение динамики относилось к осям, связанным с Землей. Постановка задачи, таким образом, была приближенная: смысл и пределы законности такого приближения были выяснены в общих рассуждениях, развитых в § 7 гл. VII т. I.

Чтобы достигнуть дальнейшего приближения, необходимо снова рассмотреть задачу, учитывая при этом и вращение Земли. Как раз этим мы и намерены здесь заняться, рассматривая, кроме того, *тяжелое тело как движущееся в пустоте,* т. е. *оставляя в стороне сопротивление воздуха.*

В следующем параграфе мы увидим, в каких пределах оказывается допустимой такая приближенная постановка задачи.

Отвлечемся поэтому от сопротивления воздуха и рассмотрим движение относительно Земли тяжелого тела (точнее, материальной точки) P, брошенного как угодно и предоставленного самому себе вблизи от поверхности Земли. При принятом выше предположении сила, действующая на P, сводится к притяжению Земли, которое мы обозначим через G, предполагая, что за единицу массы принята масса точки P, и пользуясь обозначениями § 7 гл. XVI т. I. При этом, хотя это нам и не необходимо, полезно вспомнить, что притяжение G направлено всегда к центру O Земли и имеет (для точки P с единичной массой) величину $\frac{fM}{r^2}$, где M обозначает