постановке вторичной задачи ограничиваются малыми первого порядка. В этом случае мы имеем (консервативную) возмущающую силу Ψ, зависящую исключительно от P через посредство потенциала U_1.

3) *Вращение Земли,* которое учитывается введением в правую часть уравнения (38) в виде возмущающей силы Ψ сложной центробежной силы, отнесенной к единице массы,

$$-2\omega \times v,$$

где ω означает угловую скорость вращения Земли. Естественно, что в этом случае в равенстве (42) вектору $\Phi(t)$ надо приписать значение, получающееся из указанной сложной центробежной силы, если в выражении этой последней за вектор v принять скорость снаряда, которую он имел бы в невозмущенном движении (интеграл основной задачи).

Вторичными задачами, которые возникают из этого типа возмущений, мы займемся в § 5.

§ 4. Влияние вращения Земли на движение тяжелого тела в пустоте

24. В предыдущем параграфе (так же как и при изучении движения тяжелого тела, рассматривавшегося с кинематической точки зрения в § 6 гл. II т. I) совершенно не принималось во внимание движение Земли, и основное уравнение динамики относилось к осям, связанным с Землей. Постановка задачи, таким образом, была приближенная: смысл и пределы законности такого приближения были выяснены в общих рассуждениях, развитых в § 7 гл. VII т. I.

Чтобы достигнуть дальнейшего приближения, необходимо снова рассмотреть задачу, учитывая при этом и вращение Земли. Как раз этим мы и намерены здесь заняться, рассматривая, кроме того, *тяжелое тело как движущееся в пустоте,* т. е. *оставляя в стороне сопротивление воздуха.*

В следующем параграфе мы увидим, в каких пределах оказывается допустимой такая приближенная постановка задачи.

Отвлечемся поэтому от сопротивления воздуха и рассмотрим движение относительно Земли тяжелого тела (точнее, материальной точки) P, брошенного как угодно и предоставленного самому себе вблизи от поверхности Земли. При принятом выше предположении сила, действующая на P, сводится к притяжению Земли, которое мы обозначим через G, предполагая, что за единицу массы принята масса точки P, и пользуясь обозначениями § 7 гл. XVI т. I. При этом, хотя это нам и не необходимо, полезно вспомнить, что притяжение G направлено всегда к центру O Земли и имеет (для точки P с единичной массой) величину $\frac{fM}{r^2}$, где M обозначает массу Земли, r — расстояние OP и f — известную постоянную притяжения. При этом предполагается, что Земля представляет собой сферу, состоящую из однородных концентрических слоев.

Относительно абсолютной (или связанной с неподвижными звездами) системы отсчета ускорение $\boldsymbol{a}$ точки P определяется векторным равенством

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{G}, \tag{44}$$

но здесь нас интересует *относительное движение* точки P по отношению к Земле, или, точнее, относительное ускорение ее $\boldsymbol{a}_r$. Так как оно связано с ускорением $\boldsymbol{a}$ известным соотношением Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 3)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_\tau + 2\boldsymbol{a}_c,$$

где $\boldsymbol{a}_\tau$ обозначает переносное ускорение и $\boldsymbol{a}_c$ — добавочное (или сложное центробежное ускорение *), то достаточно на основании этого соотношения исключить $\boldsymbol{a}$ из равенства (44) для того, чтобы получить векторное уравнение нашей задачи в виде

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{G} - \boldsymbol{a}_\tau - 2\boldsymbol{a}_c. \tag{45}$$

В этом динамическом уравнении, относящемся к точке P с единичной массой, два члена $-\boldsymbol{a}_\tau$ и $-2\boldsymbol{a}_c$, входящие в правую часть вместе с притяжением Земли $\boldsymbol{G}$, надо истолковывать как две (фиктивные) силы, отнесенные, как и $\boldsymbol{G}$, к единичной массе. В силе $-\boldsymbol{a}_\tau$ мы узнаем ту силу $\boldsymbol{\chi}$, которую в гл. XVI т. I мы назвали (единичной) силой *инерции переносного движения* Земли. Аналогично сила $-2\boldsymbol{a}_c$ называется *сложной центробежной силой,* тоже отнесенной к единичной массе.

Возвращаясь еще раз к тому, что говорилось в § 7 гл. XVI т. I, вспомним, что $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{\chi}$ есть не что иное, как вес тяжелого тела P, т. е. сила $\boldsymbol{g}$, которую статически можно определить как прямо противоположную той силе, которую нужно было бы приложить к телу, чтобы удержать его от падения. Кроме того, обратим внимание на то, что из двух движений, которые совершает Земля, т. е. равномерного суточного вращения и переносного движения годичного обращения, второе, при достаточно малых промежутках времени по сравнению с годичным периодом, можно рассматривать как равномерное и прямолинейное. Поэтому сила инерции $\boldsymbol{\chi} = -\boldsymbol{a}_\tau$ не увеличится заметно от этого последнего движения и сведется к центробежной силе, происходящей от суточного движения, угловая скорость которого $\boldsymbol{\omega}$ направлена по полярной оси $ПП'$ Земли с юга на север (так как

*) В русской литературе по механике добавочным (а также, следуя Н. Е. Жуковскому, поворотным) ускорением называют вектор $2\boldsymbol{a}_c$. *(Прим. ред.)*

Земля вращается с запада на восток) и имеет величину (т. I, гл. VII, п. 19).

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \frac{1}{сек}, \tag{46}$$

если время измеряется в единицах среднего солнечного времени.

Отметим, наконец, что, обозначая через $\boldsymbol{v}_r$ относительную скорость точки P, будем, как известно, иметь

$$\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r.$$

Таким образом, векторному уравнению (45) движения точки P относительно Земли можно придать окончательно вид

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \tag{45'}$$

25. Чтобы продолжить наше исследование, надо прибегнуть прежде всего к дальнейшей схематизации. Сила тяжести

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}$$

на самом деле меняется по величине и направлению от точки к точке; но в радиусе нескольких километров или, лучше сказать, в том ограниченном пространстве, в котором производятся наши наблюдения, вполне допустимо, как мы это знаем (т. I, гл. II, п. 27 и гл. XVI, пп. 39, 40), считать силу тяжести постоянной как по величине, так и по направлению.

Теперь, имея в виду приближенное интегрирование уравнения (45'), необходимо уточнить, какими членами, зависящими от ω, можно пренебречь по сравнению с g и какими пренебречь нельзя. Хотя величина ω сама по себе мала, однако нельзя пренебречь по сравнению с g членами, имеющими порядок величины $\omega^2 R/g$, где R — радиус Земли (это отношение равно отношению переносного ускорения у поверхности Земли к g). То же самое можно сказать и о членах вида $\omega V/g$, где через V обозначен максимум относительной скорости, достигаемый тяжелым телом в поле наблюдения, и, наконец, обозначая через δ максимальный размер поля наблюдения, о членах порядка $\frac{\delta}{R}$. Таким образом, количества, которые окажутся того же порядка, что и одно из трех отвлеченных чисел

$$\frac{\omega^2 R}{g}, \quad \frac{\omega V}{g}, \quad \frac{\delta}{R},$$

мы будем рассматривать, как величины первого порядка, и будем пренебрегать их квадратными или попарными произведениями. Так, например, мы будем пренебрегать членом типа $\frac{\omega^2\delta}{g}$, который может быть написан в виде $\frac{\omega^2 R}{g}\frac{\delta}{R}$ и, следовательно, представляет собой член второго порядка. В частности, по сравнению с g можно пренебрегать членами $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$, где

x, y, z обозначают координаты любой точки поля наблюдения относительно какой-нибудь системы осей, начало которой принадлежит этому полю.

Заметим, наконец, что в пределах продолжительности изучаемого явления и ωt можно рассматривать как величину (отвлеченное число) первого порядка, так что членами типа $\omega^2 t^2$ можно пренебрегать.

26. Предположим теперь, что движение происходит в северном полушарии, и за систему координат, связанную с Землей, примем систему, которая получится, если:

а) начало возьмем в точке O, неизменно связанной с Землей, вблизи того места, где происходит движение;

б) ось z направим по линии действия силы тяжести в точке O (вертикаль места) вниз;

в) ось x направим в плоскости меридиана точки O к северу.

Ось y, которая тем самым определяется однозначно, будет перпендикулярна к плоскости меридиана точки O и направлена к востоку.

При проектировании векторного уравнения (45′) на оси координат заметим, что относительно только что выбранных осей вектор $\boldsymbol{g}$, который теперь мы будем рассматривать как постоянный, будет иметь составляющие

$$0,\ 0,\ g.$$

Если γ есть острый угол, образованный вектором $\boldsymbol{g}$ с экваториальной плоскостью *(географическая широта)*, то составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$, направленного по ПП′ от П′ к П, определятся равенствами

$$p = \omega\cos\gamma, \quad q = 0, \quad r = -\omega\sin\gamma. \tag{47}$$

Поэтому из уравнения (45′) получим:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\dot{y}\omega\sin\gamma, \\ \ddot{y} &= 2\omega(\dot{x}\sin\gamma + \dot{z}\cos\gamma), \\ \ddot{z} &= g - 2\dot{y}\omega\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{45''}$$

Если в этих равенствах пренебречь сложной центробежной силой $-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$, то мы опять придем, что вполне естественно, к уравнениям движения тяжелого тела в пустоте, составленным без учета вращения Земли. Эти уравнения мы изучали в кинематике (§ 6, гл. II, т. I). Перейдем теперь к интегрированию уравнений (45″), придерживаясь порядка приближения, установленного в предыдущем пункте. Если для определенности предположить, что при $t = 0$ тяжелое тело находится в начале O и имеет скорость $\boldsymbol{v}_0$ с компонентами $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, то, интегрируя второе из уравнений (45″), найдем прежде всего

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + 2\omega(x\sin\gamma + z\cos\gamma), \tag{48}$$

откуда, подставляя $\dot{y}$ в остальные два и пренебрегая по сравнению с g членами $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$, получим два уравнения:

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}_0 \sin\gamma, \quad \ddot{z} = g - 2\omega\dot{y}_0 \cos\gamma.$$

Интегрируя их и принимая во внимание начальные условия, найдем

$$x = -\omega\dot{y}_0 \sin\gamma \cdot t^2 + \dot{x}_0 t,$$
$$z = \frac{1}{2}(g - 2\omega\dot{y}_0 \cos\gamma)\, t^2 + \dot{z}_0 t. \tag{49}$$

Если внесем эти выражения x, z в уравнение (48), отбросим члены с $\omega^2 t^2$ и проинтегрируем его, то придем к уравнению

$$y = \dot{y}_0 t + \omega(\dot{x}_0 \sin\gamma + \dot{z}_0 \cos\gamma)\, t^2 + \frac{1}{3}\omega g \cos\gamma \cdot t^3, \tag{50}$$

которое вместе с уравнениями (49) даст уравнения движения тяжелого тела P относительно Земли.

Если, в частности, предполагается, что начальная скорость v_0 равна нулю, т. е. что тяжелое тело предоставлено самому себе в положении O, то уравнения движения будут

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3}\omega g \cos\gamma t^3, \quad z = \frac{1}{2} g t^2. \tag{51}$$

Движение, следовательно, будет происходить в плоскости, проходящей через местную вертикаль и нормальной к меридиану, а траектория будет полукубической параболой, как это следует из ее уравнения

$$y^2 = \frac{8}{9}\,\frac{\omega^2 \cos^2\gamma}{g}\, z^3,$$

которое получается исключением t из второго и третьего уравнений (51).

Ордината y, определяемая вторым из этих уравнений, при $t > 0$ будет всегда положительной и очень малой, продолжительность движения t будет достаточно мала, как это обыкновенно имеет место при падении тяжелых тел. Так как ось y направлена на восток, то мы заключаем, что свободно падающее без начальной скорости тяжелое тело не движется по вертикали места, а *слегка отклоняется от вертикали к востоку*. Чтобы дать представление о порядке величины такого отклонения, заметим, что его величина за секунду времени, т. е. $\frac{\omega g \cos\gamma}{3}$, для Рима приблизительно равна 0,18 *мм* *).

Это отклонение падающих тел к востоку, которое теоретически было предсказано еще Ньютоном, экспериментально было подтверждено Тадини (1795) и более надежным способом Райхом (1831). Оно служит одним из доказательств суточного вращения Земли. О другом более наглядном доказательстве мы будем говорить в § 8.

*) Для Москвы эта величина составляет 0,13 *мм*. *(Прим. ред.)*

27. Для тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости в положении O, первое из уравнений (51) было дано в виде $x=0$; но это, разумеется, справедливо лишь для порядка приближения, принятого раньше. Если же приближенное интегрирование уравнений (45″) продолжить дальше, учитывая также и члены второго порядка в смысле, установленном в п. 25, то мы найдем для падающего тела, помимо отклонения к востоку, другое значительно менее заметное отклонение к югу.

Чтобы показать кратчайшим путем, как это получается, мы прямо предположим начальную скорость равной нулю ($\dot{x}_0=\dot{y}_0=\dot{z}_0=0$) и ограничимся вычислением с указанной точностью координаты x.

Прежде всего второе из уравнений (45″) при точном интегрировании, как и в предыдущем пункте, дает равенство (48), в котором здесь надо положить $\dot{y}_0=0$, так что мы будем иметь

$$\dot{y}=2\omega(x\sin\gamma+z\cos\gamma). \tag{48'}$$

С другой стороны, выражения (51), к которым мы пришли в предыдущем пункте, пренебрегая членами второго порядка в смысле п. 25, дают для x и z в предположении нулевой начальной скорости

$$x=0, \quad y=\frac{gt^2}{2}.$$

Это означает, что неизвестные пока более точные выражения для x, z будут вида

$$x=\delta(\mathbf{2}), \quad z=\frac{gt^2}{2}(1+(\mathbf{2})),$$

где δ обозначает длину, не превосходящую максимального измерения поля наблюдения, а символ $(\mathbf{2})$ служит для общего обозначения отвлеченного числа по меньшей мере второго порядка, которое, естественно, не будет одним и тем же в обеих формулах. Внося эти значения x и z в уравнение (48′), умноженное на ω, и объединяя в правой части члены с g, мы получим

$$\omega\dot{y}=2g\left\{\frac{\omega^2\delta\sin\gamma}{g}(\mathbf{2})+\frac{\omega^2t^2}{2}\cos\gamma(1+(\mathbf{2}))\right\}.$$

Так как ω^2t^2 и $\frac{\omega^2\delta}{g}$ суть отвлеченные числа второго порядка, то это выражение, если только в нем пренебречь членами четвертого порядка, сведется к соотношению

$$\omega\dot{y}=g\cos\gamma\cdot\omega^2t^2;$$

подставив $\dot{y}$ в первое из уравнений (45″), получим

$$\ddot{x}=-g\sin 2\gamma\cdot\omega^2t^2.$$

Из этого уравнения путем интегрирования его при начальных условиях $x = \dot{x} = 0$ найдется выражение для x, которое будет иметь вид

$$x = -\frac{1}{12} g \sin 2\gamma \cdot \omega^2 t^4.$$

Так как предполагается, что ось x направлена к северу, то знак этого выражения показывает, что речь идет об отклонении тяжелого тела к югу. Достаточно посмотреть на второе из равенств (51), чтобы убедиться, что эта вторая девиация будет значительно меньше восточной [1]).

§ 5. Деривация снаряда, происходящая вследствие вращения Земли

28. Дифференциальное уравнение задачи. Речь идет о той вторичной задаче баллистики, которая была сформулирована под рубрикой 3) в п. 23. Тогда же мы видели, что для приближенной характеристики движения снаряда, с учетом не только основных сил (силы тяжести и сопротивления воздуха), но и эффекта вращения Земли, нужно обратиться к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta} = \nu_2, \tag{41}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -h\boldsymbol{\nu} + \{ h_1 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} + h_2 \eta \} \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}, \tag{42'}$$

где через $\boldsymbol{\omega}$ обозначена угловая скорость Земли, а через $\boldsymbol{v}$ — скорость снаряда, вычисленная в предположении, что Земля не вращается. Скорость $\boldsymbol{v}$ и скалярные величины h, h_1, h_2, определяемые формулами (43), представляют собой известные функции времени в силу того, что движение, не возмущенное вращением Земли, предполагается известным (интеграл основной задачи). Неизвестный вектор $\boldsymbol{\nu}$ дает возмущение скорости $\boldsymbol{v}$ и, следовательно, интегралы

$$\xi = \delta x = \int_0^t \nu_1 dt,$$

$$\eta = \delta y = \int_0^t \nu_2 dt,$$

$$\zeta = \delta z = \int_0^t \nu_3 dt$$

от составляющих ν_1, ν_2, ν_3 вектора $\boldsymbol{\nu}$ дают возмущения координат снаряда. Так как оси выбраны таким образом, что плоскость xy представляет собой плоскость выстрела (или вертикальную пло-

[1]) Ср. Gianfranceschi, La deviazione dei gravi in caduta, *Nuovo Cimento*, т. VI, s. VI, октябрь 1913, стр. 3—33.