Из этого уравнения путем интегрирования его при начальных условиях $x=\dot{x}=0$ найдется выражение для x, которое будет иметь вид

$$x=-\frac{1}{12}g\sin 2\gamma\cdot\omega^2t^4.$$

Так как предполагается, что ось x направлена к северу, то знак этого выражения показывает, что речь идет об отклонении тяжелого тела к югу. Достаточно посмотреть на второе из равенств (51), чтобы убедиться, что эта вторая девиация будет значительно меньше восточной [1]).

§ 5. Деривация снаряда, происходящая вследствие вращения Земли

28. Дифференциальное уравнение задачи. Речь идет о той вторичной задаче баллистики, которая была сформулирована под рубрикой 3) в п. 23. Тогда же мы видели, что для приближенной характеристики движения снаряда, с учетом не только основных сил (силы тяжести и сопротивления воздуха), но и эффекта вращения Земли, нужно обратиться к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta}=\nu_2, \tag{41}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=-h\boldsymbol{\nu}+\{h_1\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}+h_2\eta\}\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}, \tag{42'}$$

где через $\boldsymbol{\omega}$ обозначена угловая скорость Земли, а через $\boldsymbol{v}$ — скорость снаряда, вычисленная в предположении, что Земля не вращается. Скорость $\boldsymbol{v}$ и скалярные величины h, h_1, h_2, определяемые формулами (43), представляют собой известные функции времени в силу того, что движение, не возмущенное вращением Земли, предполагается известным (интеграл основной задачи). Неизвестный вектор $\boldsymbol{\nu}$ дает возмущение скорости $\boldsymbol{v}$ и, следовательно, интегралы

$$\xi=\delta x=\int_0^t \nu_1 dt,$$

$$\eta=\delta y=\int_0^t \nu_2 dt,$$

$$\zeta=\delta z=\int_0^t \nu_3 dt$$

от составляющих ν_1, ν_2, ν_3 вектора $\boldsymbol{\nu}$ дают возмущения координат снаряда. Так как оси выбраны таким образом, что плоскость xy представляет собой плоскость выстрела (или вертикальную пло-

[1]) Ср. Gianfranceschi, La deviazione dei gravi in caduta, *Nuovo Cimento*, т. VI, s. VI, октябрь 1913, стр. 3—33.

скость, проходящую через начальную скорость), то, в частности, ζ в любой момент измеряет отклонение снаряда от этой плоскости или, как мы будем говорить, *деривацию*, происходящую от вращения Земли. В сочинениях по баллистике обыкновенно сохраняют специфическое название „деривация" (drift у англичан) для аналогичного отклонения, которому подвергается снаряд вследствие очень быстрого вращения около оси, сообщаемого снаряду внутренней нарезкой современных орудий. Но этой деривацией в собственном смысле, которая существенно зависит от трения скольжения между снарядом и воздухом, мы здесь не будем заниматься.

Для того чтобы охарактеризовать деривацию ζ посредством ее производной $\dot{\zeta}=\nu_3$, достаточно спроектировать уравнение (42′) на ось z, являющуюся нормалью к плоскости выстрела и (в силу соглашения п. 14) направленную влево от наблюдателя, который стоит в месте выстрела и смотрит в ту сторону, куда направлен выстрел.

Принимая во внимание, что вектор $\boldsymbol{v}$ постоянно лежит в плоскости выстрела и, следовательно, перпендикулярен к оси z и, обозначая через p, q, r составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$ по принятым здесь осям x, y, z (их не надо смешивать с компонентами п. 26 предыдущего параграфа, которые соответствовали плоскости выстрела, совпадающей с плоскостью меридиана), мы получим для деривации ζ линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\zeta}=-h\dot{\zeta}-2(p\dot{y}-q\dot{x}); \tag{52}$$

соответствующее однородное уравнение приводится к виду

$$\ddot{\zeta}=-h\dot{\zeta}. \tag{53}$$

При интегрировании уравнения (52) полезно вспомнить о соглашении, установленном в п. 23, относительно начальных условий возмущенного движения; в силу этого соглашения необходимо предположить, что в начальный момент должны равняться нулю как $\zeta=\delta z$, так и $\dot{\zeta}=\nu_3$.

29. Интегрирование дифференциального уравнения деривации. Согласно замечанию п. 23, мы заранее знаем, что общий интеграл уравнения (52) можно определить просто (посредством дифференцирования и квадратур), если известен общий интеграл соответствующей основной задачи. Здесь можно непосредственно подтвердить возможность такого перехода. Из уравнения

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}-\frac{1}{v}f\boldsymbol{v}$$

основной задачи, проектируя его на ось x и вспоминая выражение для h, даваемое первым из равенств (43), выводим

$$\ddot{x}=-h\dot{x}, \tag{53′}$$

откуда непосредственно следует, что общий интеграл однородного уравнения (53) тождественен с абсциссой $x(t)$ снаряда в невозмущенном движении.

Установив это, мы придем к интегрированию уравнения (52), применяя прямо метод варьирования постоянных, т. е. полагая $\dot\zeta = \lambda\dot x$, где λ обозначает неизвестную функцию от t и $\dot x$ — *какое-нибудь* частное решение уравнения (53'), *не равное тождественно нулю,* т. е. не соответствующее вертикальному выстрелу. Таким образом, из уравнения (52) получим

$$\dot\lambda\dot x = -2(p\dot y - q\dot x).$$

Если теперь принять во внимание, имея в виду выстрел с наклоном к горизонту, что $\dot x$ никогда не будет равно нулю, то обе части этого равенства можно будет разделить на $\dot x$. Если при этом вспомним, как находился наклон φ для невозмущенного движения, то предыдущее уравнение можно написать в виде

$$\dot\lambda = 2q - 2p\operatorname{tg}\varphi.$$

Приняв за начальный момент $t=0$, проинтегрируем это уравнение от 0 до любого t. Так как p и q суть постоянные и производная $\dot\zeta = \lambda\dot x$ должна обратиться в нуль при $t=0$, то будем иметь

$$\dot\zeta = 2qt\dot x - 2p\dot x\int_0^t \operatorname{tg}\varphi dt.$$

Для большей ясности обозначим через t любой момент, для которого желательно вычислить деривацию ζ, и через t_1 и t_2 — две переменные интеграции. Поэтому, написав предыдущее уравнение в виде

$$\dot\zeta(t_1) = 2qt_1\dot x(t_1) - 2p\dot x(t_1)\int_0^{t_1} \operatorname{tg}\varphi(t_2)\,dt_2,$$

проинтегрируем от 0 до t, имея в виду, что $\zeta(0)=0$. Применяя интегрирование по частям и принимая за неопределенный интеграл от $\dot x(t_1)$ выражение $x(t_1) - x(t)$, мы получим для деривации ζ следующее окончательное выражение:

$$\zeta(t) = -2q\int_0^t [x(t_1) - x(t)]\,dt_1 + 2p\int_0^t [x(t_1) - x(t)]\operatorname{tg}\varphi(t_1)\,dt_1.$$

30. В дополнение к предыдущему удобно указать выражение постоянных p, q, r в функции от данных задачи, т. е. от модуля ω угловой скорости Земли, от географической широты γ, от места выстрела и от азимута A плоскости выстрела (угол нашей оси x

с касательной к меридиану, направленной к северу). С этой целью возьмем снова формулы (47) п. 26 и обозначим через x', y', z' принятые там оси, а через p', q', r' — соответствующие проекции вектора ω, тогда эти формулы примут вид

$$p' = \omega \cos \gamma, \quad q' = 0, \quad r' = -\omega \sin \gamma.$$

В п. 26 вертикалью, направленной вниз, была ось z', а оси x', y' были соответственно направлены на север и на восток; теперь вертикалью, направленной вниз, является ось y, а ось x будет составлять угол A с касательной к меридиану, направленной к северу; этот угол есть угол поворота около вертикали, направленной вниз. Поэтому переход от системы x', y', z' к системе x, y, z совершается путем поворота на $\pi/2$ около оси x' и последующего вращения A около нисходящей вертикали (с которой мы условились совместить y'). Отсюда вытекает, что

$$x = x' \cos A - y' \sin A, \quad y = z', \quad z = -x' \sin A - y' \cos A,$$

и, следовательно,

$$p = \omega \cos \gamma \cos A, \quad q = -\omega \sin \gamma, \quad r = -\omega \cos \gamma \sin A. \tag{54}$$

31. Частный случай вертикального падения при квадратичном законе сопротивления. Очевидно, постановка общей задачи о деривации, данная в п. 28, остается в силе также и тогда, когда требуется оценить деривацию при вертикальном (прямолинейном) выстреле или, в частности, при падении тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости. В этом случае остается неопределенной только вертикальная плоскость xy выстрела. Если за плоскость xy примем для определенности плоскость меридиана и направим ось x к северу (и, следовательно, ось z к западу), то в формулах (54) мы должны положить $A = 0$, вследствие чего получим

$$p = \omega \cos \gamma, \quad q = -\omega \sin \gamma, \quad r = 0. \tag{54'}$$

С другой стороны, основываясь на выводах п. 28, мы получаем здесь в качестве основного дифференциального уравнения для деривации ζ уравнение (52)

$$\ddot{\zeta} = -h\dot{\zeta} - 2(p\dot{y} - q\dot{x}),$$

для которого вспомогательное однородное уравнение (53) имеет вид

$$\ddot{\zeta} = -h\dot{\zeta}.$$

Но в настоящем случае нужно непосредственно интегрировать это последнее уравнение, так как здесь общий интеграл однородного уравнения (53) уже не определяется горизонтальной составляющей $\dot{x}$ скорости в невозмущенном движении (эта составляющая здесь тождественно равна нулю).

Ограничимся в наших рассуждениях случаем, когда интенсивность f сопротивления воздуха не зависит от высоты y снаряда и оказывается пропорциональной квадрату скорости v. Как мы это видели в п. 52 гл. I, в этом предположении можно положить

$$f=\frac{gv^2}{V^2}, \tag{55}$$

где V есть постоянная величина (предельная скорость), так что в силу первого из уравнений (43) имеем

$$h=\frac{1}{v}f=\frac{gv}{V^2},$$

причем h здесь рассматривается как известная функция времени, поскольку v обозначает скорость снаряда при невозмущенном движении, которое предполагается уже известным. Эта скорость v в случае закона сопротивления (55) нами уже определена в п. 54 гл. I, где было получено

$$\frac{v}{V}=\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}=\frac{d}{d\tau}\ln(e^{\tau}+e^{-\tau}); \tag{56}$$

здесь τ обозначает некоторый параметр, связанный с временем t соотношением

$$\tau=\frac{gt}{V}, \tag{57}$$

причем предполагается, что в начальный момент $t=0$.

Теперь равенство (53), если рассматривать в нем $\dot{\zeta}$ как неизвестную функцию и на основании соотношения (57) положить

$$\ddot{\zeta}=\frac{d\dot{\zeta}}{dt}=\frac{g}{V}\frac{d\dot{\zeta}}{d\tau},$$

можно будет написать в виде

$$\frac{d\dot{\zeta}}{d\tau}=-\frac{v}{V}\dot{\zeta};$$

поэтому достаточно принять во внимание равенство (56), чтобы заключить, что

$$\dot{\zeta}=\frac{\lambda}{e^{\tau}+e^{-\tau}}, \tag{58}$$

где λ обозначает постоянную интеграции.

Возьмем теперь снова основное дифференциальное уравнение для деривации (52) и проинтегрируем его для случая тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости. В этом случае горизонтальная составляющая $\dot{x}$ скорости снаряда в невозмущенном движении обратится тождественно в нуль, а аналогичная вертикальная составляющая $\dot{y}$ будет тождественна, включая и знак, со скоростью v, определяемой равенством (56); поэтому уравнение (52), если за неизвестную функцию примем $\dot{\zeta}$, а за независимое переменное τ, приведется к виду

$$\frac{d\dot{\zeta}}{d\tau} = -\frac{v}{V}\dot{\zeta} - 2p\frac{V}{g}v. \tag{52'}$$

Применяя к этому уравнению метод вариации произвольной постоянной λ в интеграле (58) соответствующего однородного уравнения и принимая во внимание, что при $\tau = 0$ (или $t = 0$) должно быть $\dot{\zeta} = 0$, получим

$$\lambda = -2p\frac{V^2}{g}(e^{\tau} + e^{-\tau} - 2).$$

Следовательно,

$$\dot{\zeta} = \frac{g}{V}\frac{d\zeta}{d\tau} = -2p\frac{V^2}{g}\left(1 - \frac{2}{e^{\tau} + e^{-\tau}}\right); \tag{59}$$

после этого, интегрируя от 0 до τ и вспоминая, что при $\tau = 0$ должно быть $\zeta = 0$, найдем, что деривация определяется равенством

$$\zeta = -2p\frac{V^3}{g^2}\left(\tau - 2\operatorname{arctg} e^{\tau} + \frac{\pi}{2}\right). \tag{60}$$

32. Оценка влияния сопротивления воздуха на деривацию падающего тяжелого тела. Закон изменения деривации (60) в зависимости от времени или, что одно и то же, в зависимости от пропорционального ему аргумента прямо следует из того, что скорость $\dot{\zeta}$, вначале равная нулю, на основании соотношения (59) остается всегда отрицательной, так что деривация ζ постоянно убывает, а так как при $\tau = 0$ деривация тоже равна нулю, то она остается всегда отрицательной при $\tau > 0$. Если при этом мы вспомним, что ось z здесь направлена к западу (предыдущий пункт), то увидим, что $-\zeta$ дает как раз ту восточную девиацию падающего тяжелого тела, которая происходит от вращения Земли и для которой в п. 26 мы уже получили первое приближенное значение, не принимая во внимание сопротивление воздуха. Уравнение (60), наоборот, учитывает также и это важное физическое обстоятельство. Интересно количественно оценить эффект этого сопротивления воздуха, сравнивая восточную девиацию $\delta = -\zeta$, получаемую из уравнения (60), с аналогичной девиацией δ_0 в пустоте.

Эта последняя определяется вторым из уравнений (51) п. 26, которое на основании тождества $p = \omega\cos\gamma$ можно написать в виде

$$\delta_0 = \frac{1}{3}pgt^3, \tag{61}$$

после чего $\delta = -\zeta$ может быть выражена на основании (60) и (57) формулой

$$\delta = \delta_0 \frac{6\psi}{\tau^3}, \tag{62}$$

где для простоты положено

$$\psi(\tau) = \tau - 2 \operatorname{arctg} e^{\tau} + \frac{\pi}{2}. \tag{63}$$

Для оценки порядка величины полученных значений, по крайней мере при достаточно малом τ, функции $\frac{6\psi}{\tau^3}$, которая дает отношение δ/δ_0, удобно вычислить первые члены разложения ψ по степеням τ. С этой целью, условившись обозначать штрихами производные по τ, заметим прежде всего, что из сравнения соотношений (59), (60) и (63) (или прямо из непосредственного дифференцирования соотношения (63)). вытекает, что

$$\psi' = 1 - \frac{2}{e^{\tau} + e^{-\tau}},$$

и, следовательно,

$$\psi'' = 2 \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{(e^{\tau} + e^{-\tau})^2}.$$

Поэтому, если введем функцию

$$\chi = \ln \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} = \ln \operatorname{ch} \tau, \tag{64}$$

производная от которой имеет вид

$$\chi' = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = \operatorname{th} \tau,$$

то можно будет написать

$$\psi'' = (1 - \psi')\chi',$$

между тем, с другой стороны, существует известное тождество

$$\chi'' = 1 - \chi'^2.$$

Из этих двух последних соотношений обычным рекуррентным способом получим

$$\psi''' = (1 - \psi')(1 - 2\chi'^2), \quad \psi^{IV} = -(1 - \psi')\chi'(5 - 6\chi'^2),$$
$$\psi^{V} = -(1 - \psi')(1 - 2\chi'^2)(5 - 6\chi'^2) + 12(1 - \psi')\chi'^2(1 - \chi'^2).$$

Таким образом, если примем во внимание, что при $\tau = 0$ вместе с ψ будут равны нулю также ψ' и χ', то найдем

$$\psi_0 = \psi_0' = \psi_0'' = 0, \quad \psi_0''' = 1, \quad \psi_0^{IV} = 0, \quad \psi_0^{V} = -5,$$

поэтому для ψ будем иметь разложение

$$\psi(\tau)=\frac{1}{3!}\tau^3-\frac{1}{4!}\tau^5+\ldots$$

и формула (62) примет вид

$$\delta=\delta_0\left(1-\frac{1}{4}\tau^2+\ldots\right). \qquad (62')$$

Таким образом, мы видим, что отношение δ/δ_0 при $\tau\to 0$ стремится к единице, как это можно было и прямо предвидеть, так как сопротивление воздуха сказывается тем меньше, чем меньше промежуток времени, в течение которого оно действует. Более того, мы видим, что когда эта продолжительность t падения будет достаточно короткой и, следовательно, достаточно малым будет соответствующее значение (57) аргумента τ, отношение δ/δ_0 будет отличаться от своего предельного значения, равного единице, на $\tau^2/4$. Если такой поправкой можно пренебречь, то влияние сопротивления воздуха на восточную девиацию падающего тяжелого тела становится неощутимым, поэтому вполне законным будет от него отвлечься, как это и было сделано в предыдущем параграфе.

33. Критерий оценки Гаусса. Точная оценка ошибки, получаемой в том случае, когда пренебрегают сопротивлением воздуха, зависит, как мы только что видели, от численной оценки параметра τ. В предыдущем пункте этот параметр τ был определен, как отношение gt/V между конечной скоростью gt падения в пустоте продолжительностью t и предельной скоростью V. Важно отметить, что, в то время как продолжительность падения t, позволяющую вычислить скорость gt, можно определить экспериментально с вполне достаточным приближением, численное значение предельной скорости V всегда является сомнительным.

Поэтому представляет большой физический интерес показать, как, следуя критерию, указанному Гауссом [1]), можно связать численную оценку τ прямо с данными наблюдения.

Этот критерий состоит в определении порядка величины τ уже не на основании формулы (57), а на основании сравнения между высотой H_0 падения в пустоте и высотой H действительного падения равной продолжительности в воздухе. Эта высота H в отличие от предельной скорости V может быть определена удовлетворительно из опыта наравне с продолжительностью падения t. В то время как для высоты падения в пустоте мы имеем выражение

$$H_0=\frac{gt^2}{2},$$

[1]) Gauss, Werke, т. V, стр. 495—503.

высота действительного падения равной продолжительности t определяется равенством

$$H=\int_0^t vdt$$

или же на основании формулы (57) равенством

$$H=\frac{V^2}{g}\int_0^\tau \frac{v}{V}\,d\tau;$$

поэтому, принимая во внимание формулу (56), получим

$$H=\frac{V^2}{g}\ln\frac{e^\tau+e^{-\tau}}{2}.$$

Если затем ввести высоту падения H_0, принимая во внимание формулы (57) и (64) предыдущего пункта, то получим

$$H=H_0\frac{2\chi}{\tau^2}. \tag{65}$$

Так как χ представляет собой, очевидно, четную функцию от τ, то формула (65) дает соотношение между τ^2 и отношением H/H_0. Таким образом, дело сводится к тому, чтобы выразить это отношение явно через τ^2 в окрестности $\tau=0$; отсюда можно получить порядок величины τ^2, если известен порядок величины H/H_0.

С этой целью прежде всего заметим, что формулу (65), если ввести относительную разность между H_0 и H, можно написать в виде

$$\frac{H_0-H}{H_0}=\frac{2}{\tau^2}\left(\frac{\tau^2}{2}-\chi(\tau)\right). \tag{65'}$$

С другой стороны, взяв производную от χ, получим

$$\chi'=\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{e^\tau+e^{-\tau}}=1-\frac{2}{1+e^{2\tau}}; \tag{66}$$

но, как мы уже видели в предыдущем пункте,

$$\chi''=1-\chi'^2,$$

откуда тотчас следует

$$\chi'''=-2\chi'(1-\chi'^2),\quad \chi^{IV}=-2(1-\chi'^2)(1-3\chi'^2). \tag{67}$$

Таким образом, находим для $\tau=0$

$$\chi_0=\chi_0'=0,\quad \chi_0''=1,\quad \chi_0'''=0,\quad \chi_0^{IV}=-2;$$

поэтому разложение χ в ряд Маклорена, ограниченное членом четвертого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа, представится в виде

$$\chi(\tau)=\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^4}{4!}\chi^{IV}(\tau_1)$$

при τ_1, заключенном между 0 и τ; теперь равенство (65′) сведется к следующему:

$$\frac{H_0-H}{H_0}=-\frac{\tau^2}{12}\chi^{IV}(\tau_1). \tag{65″}$$

Обращаясь снова к формуле (65′), легко убедиться, что, как бы ни изменялось τ от 0 до ∞, функция в правой части не будет отрицательной. Действительно, это очевидно для первого множителя $2/\tau^2$. Что же касается второго, то заметим прежде всего, что его первая производная функция $\tau-\chi'$ не может убывать, так как производная от функции $\tau-\chi'$, равная $1-\chi''=\chi'^2$, всегда больше или равна нулю; так как, кроме того, при $\tau=0$ функция $\tau-\chi'$ исчезает, то она будет всегда больше или равна нулю. По тем же соображениям заключаем, что и функция $\tau^2/2-\chi(\tau)$, равная нулю при $\tau=0$ и никогда не убывающая, будет всегда больше или равна нулю.

Поэтому, подставляя в правую часть формулы (65″) выражение, даваемое равенством (65″), и деля на $\tau^2/12$, найдем

$$-\chi^{IV}(\tau_1)\geqslant 0$$

или же для второго из равенств (67)

$$2(1-\chi'^2(\tau_1))(1-3\chi'^2(\tau_1))\geqslant 0.$$

Но каково бы ни было τ_1, функция $\chi'(\tau_1)$, как это следует из формулы (66), будет заключена между 0 и 1, так что третий множитель $1-3\chi'^2(\tau_1)$ должен быть больше или равен нулю, а это, очевидно, означает, что этот множитель будет заключен между 0 и -1. Мы заключаем отсюда, что $0\leqslant-\chi^{IV}(\tau_1)\leqslant 2$, так что равенство (65″) принимает окончательный вид

$$\frac{H_0-H}{H_0}=\theta\frac{\tau^2}{6}, \tag{65″}$$

где

$$\theta=-\frac{\chi^{IV}(\tau_1)}{2}$$

представляет собой положительную величину, меньшую единицы, которая, как это видно из второго из равенств (67), стремится к 1 при $\tau\to 0$. Формула (65″) показывает, что τ^2 будет по крайней мере порядка величины $6(H_0-H)/H_0$. Если это отношение будет равно нескольким сотым, то то же можно сказать и о τ^2 (поскольку, следуя Гауссу, можно предположить, что величина $1/\theta$ не слишком отличается от значения 1, которое она имеет при $\tau=0$). В таком случае, с аналогичным приближением можно отождествить δ с δ_0 в формуле (62′), пренебрегая величиной τ^2 и более высокими степенями τ.

Именно так получалось в опытах Гульельмини и Бенценберга, на которые опирался Гаусс. В опытах Бенценберга, производившихся в Гамбурге, имелось по определению Бенценберга $t=4''$, $H=76$ *м* (приблизительно); так как $H_0=78{,}4$ *м*, то поправочный член $\tau^2/4$ в формуле (62′) получался порядка $6H_0-H/4H_0=0{,}045$. На основании этого численного результата Гаусс и утверждал (по крайней мере для тех данных наблюдения, которыми он располагал), что действием сопротивления воздуха на девиацию падающих тел можно пренебрегать.

Но равенство (65‴), в котором θ заключено между 0 и 1, показывает, что τ^2 не меньше чем $6(H_0-H)/H_0$; так что, когда относительная разница между H_0 и H становится ощутительной, отождествлять δ и δ_0 при вычислении отклонения падающего тяжелого тела к востоку нельзя даже при простой оценке порядка величины, и необходимо принимать во внимание поправочный множитель $6\psi/\tau^3$ в равенстве (62).

34. Чтобы дать представление о порядке величины τ^2 для значительных высот падения, который получился из более поздних наблюдений, приведем здесь результаты опытов, выполненных Р. Г. Ленноном[1]) в четырех угольных шахтах Ньюкэстля в условиях спокойного воздуха. Действительные высоты падения в метрах, продолжительность t в секундах, соответствующие высоты падения в пустоте и ушестеренные относительные изменения разности между H_0 и H даны в таблице

H	17	65	134	220	312	410
t	2	4	6	8	10	12
H_0	19,6	78	176	313	490	707
$6\dfrac{H_0-H}{H_0}$	0,79	1	1,43	1,78	2,18	2,52

Последняя строка показывает, что во всех этих опытах величиной $\tau^2 \geqslant 6(H_0-H)/H_0$ нельзя пренебречь, так как, начиная с значений, близких к 1, она достигает и превосходит значение 2 для

[1]) R. G. Lunnon, *Philosophical Magazine*, т. 47, январь 1924, стр. 173—182.

наблюдавшегося падения с больших высот. Бросается в глаза несогласие между данными Бенценберга, на которые опирался Гаусс (предыдущий пункт), и вторым из наблюдений Леннона. Оба наблюдавшихся в действительности падения в 76 и 65 *м* происходили в течение 4 *сек* в спокойном воздухе; разница ясно видна при оценке верхнего предела τ^2, который в первом случае, как мы видели, был примерно равен $4 \times 0{,}045 = 0{,}18$, а во втором достигал 1.

§ 6. Понятие о динамической устойчивости равновесия и малые колебания

35. В статике точки (т. I, гл. IX, п. 19) мы дали первое определение понятия *устойчивости* положения равновесия. Здесь, в дополнение к динамике свободной точки, надо будет уточнить это понятие с динамической точки зрения.

Равновесие материальной точки P в некотором положении M имеет устойчивый характер, если точка, предоставленная действию активной силы на достаточно малом расстоянии от M с достаточно малой начальной скоростью (а следовательно, и с достаточно малой живой силой), движется сколь угодно долго вблизи от M со скоростью, не превосходящей определенного предела. Точнее, равновесие называется *устойчивым*, если, задав два положительных произвольно малых числа δ и ε, можно соответственно определить два других положительных числа δ_0 и ε_0, таких, что точка, предоставленная действию силы на расстоянии от M, меньшем δ_0, и с живой силой, меньшей ε_0, будет неопределенно долго двигаться внутри сферы с центром в M и с радиусом δ, причем ее живая сила не будет превосходить ε.

36. ТЕОРЕМА Дирихле [1]. Ограничимся рассмотрением случая, когда действующая сила консервативна, т. е. представляет собой производную от потенциала U (конечного и непрерывного вместе со своими первыми производными в рассматриваемой области поля действия силы). Составляющие X, Y, Z активной силы в этом случае имеют вид

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

а уравнения движения точки допускают (п. 2, в) интеграл живых сил

$$T-U=\text{const},$$

где $T=\frac{mv^2}{2}$ есть живая сила точки.

[1] Лежен-Дирихле (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet) родился около Аахена в 1805 г.; после длительного пребывания в Париже был профессором в университете в Бреславле, потом в университете в Гёттингене и в этом же городе умер в 1859 г. Его имя связано с результатами, ставшими теперь классическими, в различных областях анализа и механики: теории чисел, рядах Фурье, теории потенциала, гидродинамике.