наблюдавшегося падения с больших высот. Бросается в глаза несогласие между данными Бенценберга, на которые опирался Гаусс (предыдущий пункт), и вторым из наблюдений Леннона. Оба наблюдавшихся в действительности падения в 76 и 65 *м* происходили в течение 4 *сек* в спокойном воздухе; разница ясно видна при оценке верхнего предела τ^2, который в первом случае, как мы видели, был примерно равен $4 \times 0{,}045 = 0{,}18$, а во втором достигал 1.

§ 6. Понятие о динамической устойчивости равновесия и малые колебания

35. В статике точки (т. I, гл. IX, п. 19) мы дали первое определение понятия *устойчивости* положения равновесия. Здесь, в дополнение к динамике свободной точки, надо будет уточнить это понятие с динамической точки зрения.

Равновесие материальной точки P в некотором положении M имеет устойчивый характер, если точка, предоставленная действию активной силы на достаточно малом расстоянии от M с достаточно малой начальной скоростью (а следовательно, и с достаточно малой живой силой), движется сколь угодно долго вблизи от M со скоростью, не превосходящей определенного предела. Точнее, равновесие называется *устойчивым*, если, задав два положительных произвольно малых числа δ и ε, можно соответственно определить два других положительных числа δ_0 и ε_0, таких, что точка, предоставленная действию силы на расстоянии от M, меньшем δ_0, и с живой силой, меньшей ε_0, будет неопределенно долго двигаться внутри сферы с центром в M и с радиусом δ, причем ее живая сила не будет превосходить ε.

36. ТЕОРЕМА Дирихле[1]). Ограничимся рассмотрением случая, когда действующая сила консервативна, т. е. представляет собой производную от потенциала U (конечного и непрерывного вместе со своими первыми производными в рассматриваемой области поля действия силы). Составляющие X, Y, Z активной силы в этом случае имеют вид

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

а уравнения движения точки допускают (п. 2, в) интеграл живых сил

$$T - U = \text{const},$$

где $T = \frac{mv^2}{2}$ есть живая сила точки.

[1]) Лежен-Дирихле (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet) родился около Аахена в 1805 г.; после длительного пребывания в Париже был профессором в университете в Бреславле, потом в университете в Гёттингене и в этом же городе умер в 1859 г. Его имя связано с результатами, ставшими теперь классическими, в различных областях анализа и механики: теории чисел, рядах Фурье, теории потенциала, гидродинамике.

С другой стороны, уже в статике отмечалось (т. I, гл. IX, п. 19), что во всяком положении равновесия точки три частные производные от U должны обращаться в нуль, так что для всякого положения равновесия потенциал имеет стационарное значение. В частности, потенциал может иметь в этом положении максимум или минимум, но, как известно из анализа, это условие является только необходимым. Если в точке M для функции U имеет место действительный максимум, то справедливо известное предложение (теорема Дирихле), для доказательства которого используется только одно следствие уравнений движения, а именно упомянутый выше интеграл живых сил. Теорема эта следующая:

Для точки, находящейся под действием консервативной силы, всякое положение, в котором потенциал имеет максимум, есть положение устойчивого равновесия (в том смысле, как это определено выше).

Пусть заданы два произвольных положительных числа: δ и ε. Очевидно, можно предположить, что величина δ достаточно мала для того, чтобы во всякой точке P, не внешней для сферы с центром в M и радиусом δ (но, конечно, отличной от M), потенциал, по предположению непрерывный, был меньше максимума U_M, т. е.

$$U_M - U_P > 0 \quad \text{при} \quad 0 < MP \leqslant \delta. \tag{68}$$

Тогда, если обозначим, в частности, через Q переменную точку на поверхности этой сферы с центром в M и радиусом δ, то положительная непрерывная функция $U_M - U_Q$ будет иметь минимум, больший нуля. Всегда можно взять положительное число ε_0 таким, чтобы $2\varepsilon_0$ было одновременно меньше этого минимума и числа ε, т. е.

$$U_M - U_Q > 2\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad MQ = \delta; \quad \varepsilon > 2\varepsilon_0. \tag{69}$$

С другой стороны, в силу той же непрерывности потенциала U можно определить другое положительное число δ_0, достаточно малое для того, чтобы во всякой точке P_0, не внешней для сферы с центром в M и радиусом δ_0, потенциал отличался от максимума U_M меньше, чем на ε_0, т. е. чтобы было

$$U_M - U_{P_0} < \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad P_0M \leqslant \delta_0. \tag{70}$$

Для того, чтобы убедиться, что точка M является положением устойчивого равновесия, достаточно показать, что точка, предоставленная действию приложенной силы в некотором положении P_0, будет сколь угодно долго двигаться внутри сферы с центром в M и радиусом δ; при этом ее живая сила будет меньше ε, если в положении P_0 она была меньше ε_0.

С этой целью будем рассуждать от противного, допустив, что точка при движении в конце концов уходит из этой сферы. В определенный момент она пройдет через поверхность в некотором положении Q с такой живой силой T, что, на основании интеграла живых сил, если T_0 является начальной живой силой, будем иметь

$$T - U_Q = T_0 - U_{P_0};$$

оставляя в левой части T, а в правой части прибавляя и вычитая максимум U_M, получим

$$T = T_0 + (U_M - U_{P_0}) - (U_M - U_Q).$$

Но это равенство неверно, так как по предположению и в силу неравенств (69), (70) имеем

$$T_0 < \varepsilon_0, \quad U_M - U_{P_0} < \varepsilon_0, \quad U_M - U_Q > 2\varepsilon_0, \tag{71}$$

а отсюда следует

$$T < 0.$$

Таким образом, мы доказали, что точка не может выходить из сферы с центром в M и радиусом δ.

Что же касается ее живой силы, то из уравнения живых сил, относящегося к любому положению P точки, т. е. из уравнения

$$T - U_P = T_0 - U_{P_0},$$

получим

$$T = T_0 + (U_M - U_{P_0}) - (U_M - U_P).$$

Так как точка P является всегда внутренней для сферы с центром M и радиусом δ, то разность $U_M - U_P$ на основании неравенства (68) будет всегда положительной (или нулем, если P попадает в M); поэтому будем иметь

$$T \leqslant T_0 + (U_M - U_{P_0})$$

и, следовательно, на основании первого из двух неравенств (71) и второго из (69),

$$T \leqslant 2\varepsilon_0 < \varepsilon.$$

37. Малые колебания около положения устойчивого равновесия. Этим названием, как легко понять, обозначают такое движение точки P, которое она совершает сколь угодно долго в непосредственной близости от своего устойчивого положения равновесия M (с живой силой, не превосходящей известного заданного предела). Здесь мы предполагаем изучить характер этого движения, имея в виду случай, когда действующая сила консервативна, а потенциал U имеет в точке M действительный максимум.

Для этой цели необходимо некоторое предварительное аналитическое рассмотрение выражения этого потенциала. Взяв для простоты начало координат в точке M, мы всегда можем выбрать аддитивную произвольную постоянную потенциала так, чтобы он исчезал в M. В этой точке, поскольку речь идет о ней как о точке максимума, исчезают также и три первых производных $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$; поэтому полагая, что членами четвертого порядка в разложении Маклорена можно пренебречь, для всякой точки M некоторой окрестности начала координат будем иметь

$$U=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 x^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 y^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 z^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)_0 yz+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\right)_0 zx+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy\right\}+(3),$$

где $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_0$ равны значениям, принимаемым в начале координат вторыми производными от U, а (3) представляет собой кубичную форму от x, y, z. Если отбросим исключительный случай, когда в точке M исчезают все вторые производные, то, как известно из анализа, для того чтобы функция U имела действительный максимум в M, требуется, чтобы квадратичная форма, состоящая из членов второго порядка, была *определенно отрицательной*, т. е. оставалась отрицательной во всей окрестности точки M, за исключением разве той точки, в которой она исчезает.

Если для удобства примем обозначения

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0=-a_{11},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0=-a_{22},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0=-a_{33},$$
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)_0=-a_{23},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\right)_0=-a_{31},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_0=-a_{12},$$

то предыдущее выражение U можно будет написать в виде

$$U=-\frac{1}{2}\{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy\}+(3),$$

где квадратичная форма в фигурных скобках будет определенной и положительной. Далее, как известно (вспомним приведение к канонической форме уравнения эллипсоида), всегда можно выбрать оси (с началом в M) так, чтобы эта форма свелась к сумме трех квадратов

$$\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2;$$

так что в конце концов получается

$$U=-\frac{1}{2}\{\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2\}+(3). \tag{72}$$

Выбрав таким образом оси, обратимся снова к нашей точке P. По теореме Дирихле, точка P не выходит из сферы с центром в M произвольно малого радиуса δ, лишь бы вначале она была предоставлена действию силы в некотором положении P_0, достаточно близком к M $(MP_0<\delta_0)$ и с достаточно малой живой силой T_0 $(T_0<\varepsilon_0)$.

Если теперь представим себе, что величина δ достаточно мала для того, чтобы внутри сферы с центром в M и радиусом δ не только оставалось в силе равенство (72), но и можно было с достаточным приближением пренебречь членами третьего порядка (относительно расстояния MP, а следовательно, и относительно x, y, z), то можно будет принять потенциал в виде

$$U = -\frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2).$$

Малые колебания около M точки P, массу которой мы для простоты вычислений будем предполагать равной единице, будут тогда определяться уравнениями

$$\ddot{x} = -\omega_1^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega_2^2 y, \quad \ddot{z} = -\omega_3^2 z. \tag{73}$$

Из формы этих уравнений прямо следует, что:

Малые колебания материальной точки около положения устойчивого равновесия всегда можно разложить на три гармонических колебания по трем взаимно перпендикулярным, надлежащим образом выбранным направлениям.

38. Интегралами уравнений (73), как известно, будут (т. I, гл. II, п. 36)

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad z = r_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3), \tag{74}$$

где произвольные постоянные r_1, r_2, $r_3 (\geqslant 0)$ и θ_1, θ_2, θ_3 можно определить по начальным положению и скорости, задаваемым, разумеется, в тех пределах, в которых сохраняют свое значение уравнения (73).

Но важно отметить, что периоды $\frac{2\pi}{\omega_1}$, $\frac{2\pi}{\omega_2}$, $\frac{2\pi}{\omega_3}$ трех составляющих гармонических движений не зависят от этих начальных условий, а зависят только от величин ω_1, ω_2, ω_3, т. е. от природы консервативной силы, действующей на движущуюся точку.

Добавим еще, что хотя три составляющих движения являются периодическими, однако движение точки P, вообще говоря, не периодично. Чтобы доказать это и в то же время охарактеризовать тот случай, когда движение P будет периодическим, заметим, что, для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы через равные промежутки времени T точка P приходила в одно и то же положение с одной и той же скоростью, или, другими словами, чтобы три функции (74) от t были периодическими *с одним и тем же периодом* T. Теперь, если рассмотрим, например, функцию $x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)$, то ясно, что для того, чтобы она допускала период T, необходимо и достаточно, чтобы для любого значения t имело место равенство

$$\cos(\omega_1 t + \theta_1) = \cos(\omega_1 [t + T] + \theta_1)$$

и, следовательно, чтобы сумма или разность аргументов двух косинусов была равна целому кратному $2n_1\pi$ от 2π. Но равенство

$$(\omega_1[t+T]+\theta_1)+(\omega_1 t+\theta_1)=2\omega_1 t+2\theta_1+\omega_1 T=2n_1\pi$$

не может удовлетворяться тождественно, так как, если бы оно удовлетворялось при любом значении t, то должно было бы быть отдельно $2\theta_1+\omega_1 T=2n_1\pi$ и $\omega_1=0$, между тем как величина ω_1 положительна. Поэтому остается возможным только равенство

$$(\omega_1[t+T]+\theta_1)-(\omega_1 t+\theta_1)=\omega_1 T=2n_1\pi,$$

или же

$$T=n_1\frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Подобным же образом предположение, что T есть общий период функций $y=r_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)$, $z=r_3\cos(\omega_3 t+\theta_3)$, влечет за собой равенства

$$T=n_2\frac{2\pi}{\omega_2},\qquad T=n_3\frac{2\pi}{\omega_3},$$

где n_2 и n_3 обозначают два других целых числа. Отсюда заключаем, что для периодичности движения точки P необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$n_1\frac{2\pi}{\omega_1}=n_2\frac{2\pi}{\omega_2}=n_3\frac{2\pi}{\omega_3}$$

или, если угодно, соотношения

$$\frac{\omega_1}{n_1}=\frac{\omega_2}{n_2}=\frac{\omega_3}{n_3},$$

при целых n_1, n_2, n_3, т. е. чтобы частоты ω_1, ω_2, ω_3 *трех составляющих гармонических колебаний были соизмеримы между собой.*

Если это требование выполняется, то траектория будет замкнутой и алгебраической, в противном случае движение точки P не будет периодическим, и траектория будет незамкнутой и трансцендентной.

Интересный частный случай периодических малых колебаний мы будем иметь, когда ω_1, ω_2, ω_3 будут равны одной и той же величине ω. Тогда потенциал в окрестности положения равновесия приведется к виду

$$U=-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2+z^2)=-\frac{1}{2}\omega^2 r^2,$$

так что мы снова приходим к случаю притягивающей силы с центром в M, пропорциональной расстоянию MP (п. 10). Следовательно, речь идет о плоском движении, и траекторией, вообще говоря, будет эллипс, имеющий центр в точке M. В частном случае, в зависимости от начальных условий, этот эллипс может оказаться окружностью или отрезком прямой.

39. Во всяком случае достаточно принять во внимание максимальные и минимальные значения, достигаемые тремя функциями (74), чтобы убедиться, что траектория не выходит из прямоугольного параллелепипеда, заключенного между тремя парами параллельных плоскостей: $x = \pm r_1$, $y = \pm r_2$, $z = \pm r_3$. Легко также убедиться, что во всякой точке, общей для траектории и грани этого параллелепипеда, кривая будет касаться плоскости грани. Например, движущаяся точка будет находиться на плоскости $x = r_1$ во все такие и только такие моменты, когда $\cos(\omega_1 t + \theta_1)$ будет равен единице, т. е. когда $\omega_1 t + \theta_1$ становится кратным 2π; в эти моменты $\dot{x} = -r_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$ исчезает, так что скорость (а следовательно, и касательная к траектории) будет лежать как раз в плоскости $x = r_1$.

Здесь необходимо сделать одно общее замечание. *Когда величины* ω_1, ω_2, ω_3 *несоизмеримы между собой* (непериодическое движение), *траектория практически заполняет вышеуказанный параллелепипед* в том смысле, что для любой взятой внутри параллелепипеда точки P_1 и наперед заданного произвольно малого положительного δ движущаяся точка пройдет (бесконечное число раз) на расстоянии от P_1, меньшем чем δ.

Для простоты рассуждения рассмотрим случай плоского движения

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2). \tag{75}$$

Здесь речь будет итти о том, чтобы доказать, что в предположении несоизмеримых ω_1 и ω_2 траектория пройдет (бесконечное число раз) внутри круга, имеющего центр в произвольно выбранной в прямоугольнике $x = \pm r_1$, $y = \pm r_2$ точке P_1 и с произвольно малым радиусом δ.

Для этой цели, обозначив через x_1, y_1 координаты точки P_1 (заключенные соответственно между $-r_1$ и r_1 и $-r_2$ и r_2), заметим, что если t_1 есть решение уравнения

$$r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) = x_1$$

относительно t, то движущаяся точка будет иметь абсциссу x_1 во все следующие моменты:

$$t_1 + 2n_1 \frac{\pi}{\omega_1}, \tag{76}$$

где n_1 обозначает любое целое число. Точно так же, если t_2 есть решение уравнения

$$r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) = y_1,$$

ордината движущейся точки принимает значение y_1 во все моменты

$$t_2 + 2n_2 \frac{\pi}{\omega_2}, \tag{76'}$$

где n_2 обозначает другое произвольное целое число.

С другой стороны, вследствие (равномерной) непрерывности функций (75) мы можем определить достаточно малое число ε так, чтобы в каждом промежутке времени величиной 2ε колебание как функции $x(t)$, так и функции $y(t)$ было меньше $\delta/2$. Сообразно с этим в каждом из промежутков времени от $t_1+2n_1\pi/\omega-\varepsilon$ до $t_1+2n_1\pi/\omega+\varepsilon$ мы будем иметь

$$|x-x_1|<\frac{\delta}{2}; \tag{77}$$

точно так же в каждом из промежутков времени от $t_2+2n_2\pi/\omega_2-\varepsilon$ до $t_2+2n_2\pi/\omega_2+\varepsilon$ будем иметь

$$|y-y_1|<\frac{\delta}{2}. \tag{77'}$$

Рассмотрим теперь величину промежутка времени, заключенного между любыми моментами (76) и (76')

$$\left|t_1-t_2+2\pi\left(\frac{n_1}{\omega_1}-\frac{n_2}{\omega_2}\right)\right|.$$

При заданной несоизмеримости величин ω_1 и ω_2 бесчисленным множеством способов можно определить целые числа n_1 и n_2 таким образом, что эта величина промежутка времени получится меньше ε[1]). Тогда во всем промежутке времени, заключенном между двумя

---

[1]) Так как замечание, приведенное в тексте (и известное еще Якоби), представляет собой частный случай классической теоремы Кронекера (*Berl. Sitzungsber.*, 1884), то уместно будет дать здесь его доказательство. Речь идет о том, чтобы показать, что *если даны два числа* α_1 *и* α_2, *отношение которых иррационально* (эти числа в дальнейшем мы отождествляем с $2\pi/\omega_1$, $-2\pi/\omega_2$) *и какое-нибудь третье число* P (которое мы потом отождествим с t_2-t_1), *то соответственно всякому как угодно малому числу* ε *можно выбрать два таких целых числа* n_1, n_2 *(положительных или отрицательных), чтобы иметь*

$$|n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-p|<\varepsilon.$$

Начнем с доказательства того, что биномы типа $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$ могут как угодно близко апроксимировать нуль; с этой целью последовательно возьмем $n_1=1, 2, 3, \ldots$, и к каждому целому n_1 добавим целую часть n_2 частного $|n_1\alpha_1/\alpha_2|$, взятую со знаком, противоположным знаку частного α_1/α_2. Для всякой пары определенных таким образом чисел будем иметь

$$|n_1\alpha_1+n_2\alpha_2|<|\alpha_2|;$$

а так как вследствие иррациональности отношения α_1/α_2 биномы $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$ будут все неравны между собой и число этих биномов бесконечно, то совокупность их допускает по крайней мере одно предельное значение (заключенное между α_2 и $-\alpha_2$). Если зададимся тогда как угодно малым и положительным ε, то в совокупности будет существовать сколько угодно биномов, отличающихся по модулю от этого предельного значения на величину, меньшую чем $\varepsilon/2$; поэтому разность между двумя из них, выбранными как моментами (76) и (76'), определенном таким образом, будут совместно выполнены оба неравенства (77) и (77'). Имея в виду неравенство

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \leqslant |x-x_1|+|y-y_1|,$$

заключаем, что движущаяся точка проходит от P_1 на расстоянии, меньшем δ. Распространение этого рассуждения на случай аналогичного движения в трех измерениях очевидно.

§ 7. Движение точки по поверхности без трения. Геодезические линии. Случай поверхности вращения

40. Перейдем теперь к некоторым задачам динамики точки в двух измерениях или с двумя степенями свободы.

Наиболее простым является случай материальной точки P, которая под действием активных сил с результирующей F вынуждена двигаться по поверхности σ без трения. Пусть уравнение поверхности σ имеет вид

$$f(x,\ y,\ z\,|\,t)=0, \tag{78}$$

где аргумент t входит явно, если поверхность изменяется с течением времени.

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяющие движение точки P, должны тождественно удовлетворять уравнению (78), откуда следует, что они будут удовлетворять также и равенству

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{79}$$

Может случиться, что точка P, будучи свободной, движется по поверхности σ вследствие самой природы активной силы F. Но, вообще говоря, это произойдет лишь тогда, когда точка P удерживается на поверхности σ связью, осуществленной каким-либо способом.

Тогда наряду с активной силой F (закон действия которой по предположению является заданным) мы будем иметь неизвестную реакцию R, источником которой является связь, а потому резуль-

---

угодно, которая будет тоже биномом вида $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$, по абсолютной величине будет меньше, чем ε.

Заметив это, возьмем теперь снова заданное число p и, выбрав на основании только что сказанного бином $n_1^*\alpha_1+n_2^*\alpha_2=q$, для которого $|q|<\varepsilon$, обозначим через N целую часть дроби $|p/q|$ так, чтобы было

$$\left|\frac{p}{q}\right|=N+r$$

при $r<1$. Отсюда следует

$$|p|=N|q|+r|q|,$$

а так как $r|q|$ меньше $|q|$ и, следовательно, меньше ε, то мы заключаем, что Nq или $-Nq$, которое во всяком случае является биномом типа $n_1\alpha_1+$ $+n_2\alpha_2$, отличается от p по абсолютной величине на значение, меньшее чем ε.