моментами (76) и (76'), определенном таким образом, будут совместно выполнены оба неравенства (77) и (77'). Имея в виду неравенство

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \leqslant |x-x_1|+|y-y_1|,$$

заключаем, что движущаяся точка проходит от P_1 на расстоянии, меньшем δ. Распространение этого рассуждения на случай аналогичного движения в трех измерениях очевидно.

§ 7. Движение точки по поверхности без трения. Геодезические линии. Случай поверхности вращения

40. Перейдем теперь к некоторым задачам динамики точки в двух измерениях или с двумя степенями свободы.

Наиболее простым является случай материальной точки P, которая под действием активных сил с результирующей F вынуждена двигаться по поверхности σ без трения. Пусть уравнение поверхности σ имеет вид

$$f(x, y, z \mid t)=0, \tag{78}$$

где аргумент t входит явно, если поверхность изменяется с течением времени.

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяющие движение точки P, должны тождественно удовлетворять уравнению (78), откуда следует, что они будут удовлетворять также и равенству

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{79}$$

Может случиться, что точка P, будучи свободной, движется по поверхности σ вследствие самой природы активной силы F. Но, вообще говоря, это произойдет лишь тогда, когда точка P удерживается на поверхности σ связью, осуществленной каким-либо способом.

Тогда наряду с активной силой F (закон действия которой по предположению является заданным) мы будем иметь неизвестную реакцию R, источником которой является связь, а потому резуль-

---

угодно, которая будет тоже биномом вида $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$, по абсолютной величине будет меньше, чем ε.

Заметив это, возьмем теперь снова заданное число p и, выбрав на основании только что сказанного бином $n_1^*\alpha_1+n_2^*\alpha_2=q$, для которого $|q|<\varepsilon$, обозначим через N целую часть дроби $|p/q|$ так, чтобы было

$$\left|\frac{p}{q}\right|=N+r$$

при $r<1$. Отсюда следует

$$|p|=N|q|+r|q|,$$

а так как $r|q|$ меньше $|q|$ и, следовательно, меньше ε, то мы заключаем, что Nq или $-Nq$, которое во всяком случае является биномом типа $n_1\alpha_1+$ $+n_2\alpha_2$, отличается от p по абсолютной величине на значение, меньшее чем ε.

тирующая сила, действующая на точку, будет состоять не только из силы $\boldsymbol{F}$, а из суммы $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$, так что уравнение движения будет иметь вид

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}, \tag{80}$$

где m обозначает массу точки P и $\boldsymbol{a}$ — ее ускорение. Как для действительного интегрирования уравнения, так и для истолкования физического смысла задачи важно заметить следующее. *Если точка движется по некоторой неподвижной поверхности без трения, то для нее будет иметь место теорема живых сил.*

Действительно, если мы умножим скалярно обе части равенства (80) на $\boldsymbol{v}dt=dP$ и вспомним, что $m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}dt$ есть дифференциал живой силы $T=\frac{mv^2}{2}$ точки, а $\boldsymbol{F}\cdot dP$ есть элементарная работа dL активной силы, то получим

$$dT=dL+\boldsymbol{R}\cdot dP.$$

Но в силу предположения об отсутствии трения реакция $\boldsymbol{R}$ нормальна к поверхности σ. С другой стороны, так как уравнение поверхности по предположению не зависит от времени, то перемещение dP от любой точки поверхности σ до точки, бесконечно близкой к ней на той же поверхности, лежит в касательной плоскости. Отсюда следует, что $\boldsymbol{R}$ и dP в любой момент ортогональны, а потому в течение всего движения будет существовать равенство

$$dT=dL, \tag{81}$$

которое, как и в случае свободной точки, выражает теорему живых сил (т. I, гл. VIII, п. 9).

Отметим еще, что если речь идет о неподвижной поверхности, то произведение $\boldsymbol{R}\cdot dP$ можно рассматривать также (т. I, гл. VI, п. 13; гл. XV, п. 3) как виртуальную работу реакции, а потому из общего принципа виртуальной работы прямо следует, что она обращается в нуль.

41. Так же как и в случае свободной точки, если действующая сила консервативна и U есть ее потенциал, то равенство (81) принимает вид

$$dT=dU,$$

откуда, интегрируя, получим

$$\frac{mv^2}{2}=U+E,$$

где через E обозначена постоянная интеграции, или, иначе,

$$\frac{mv^2}{2}-U=E,$$

т. е. *полная энергия движущейся точки не изменяется во время движения.*

Если обозначим через v_0, U_0 значения скорости и потенциала в любом положении P_0, то предыдущее уравнение можно будет написать в виде

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = U - U_0.$$

Это равенство может быть истолковано аналогично тому, как это делалось в случае движения точки по заданной кривой (гл. I, п. 14). Из него, между прочим, следует, что если две материальные точки с одинаковой массой выходят из положения P_0 с равными скоростями и находятся под действием одной и той же консервативной силы, то даже если одна из них свободна, а другая связана с поверхностью, по которой она может двигаться без трения, они будут приходить в точки, в которых потенциал имеет одно и то же значение, с одинаковыми скоростями. Так, например, если две материальные точки с равной массой, выходя из одного и того же положения и из состояния покоя, движутся в пустоте под действием силы тяжести, причем одна из них свободно падает, а другая остается на заданной поверхности без трения, то на одинаковых высотах они будут иметь одинаковые скорости.

42. Реакция R, как мы уже упоминали, неизвестна; предполагая, что поверхность σ гладкая, найдем, что реакция R должна быть нормальной к поверхности σ (точнее, к той конфигурации, которую поверхность σ принимает в любое заданное мгновение, если эта поверхность изменяется с течением времени). Отсюда следует, что направляющие косинусы реакции R пропорциональны частным производным $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, а ее составляющие будут иметь вид

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

где λ обозначает множитель пропорциональности, заранее неизвестный (*множитель Лагранжа*) и связанный с величиной R соотношением

$$R^2 = \lambda^2\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Здесь трехчлен, стоящий в скобках, естественно, зависит в силу уравнения (78) от положения, которое занимает движущаяся точка на поверхности в любое рассматриваемое мгновение.

Проектируя теперь уравнение (80) на оси, мы получим три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{80'}$$

которые вместе с уравнением (78) образуют систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными: x, y, z (основными) и λ (вспомогательной). Исключая λ из уравнений (80'), получим два уравнения с основными неизвестными, которые вместе с уравнением (78) определяют эти неизвестные на основании начальных условий. Тогда движение будет полностью известно, и достаточно воспользоваться каким-нибудь одним из уравнений (80'), чтобы получить значение λ, если нужно определить величину реакции.

43. Но если движение известно, то для величины реакции R можно дать более удобную формулу.

Предположим для определенности, что поверхность σ в некоторой окрестности рассматриваемой точки расположена вся по одну сторону от касательной плоскости, и обозначим через N нормаль, направленную в сторону вогнутости. Обозначив через t касательную к траектории, рассмотрим сечение поверхности σ плоскостью tN (нормальное сечение по касательной к траектории) и обозначим через φ угол, который составляет главная нормаль к траектории (направленная к центру кривизны) с нормалью к поверхности N. По предположению, сделанному относительно поверхности σ, этот угол острый, а, с другой стороны, если r и r_0 — радиусы кривизны траектории и нормального сечения касательной в точке касания, то по теореме Мёнье[1]) имеем

$$r = r_0 \cos\varphi.$$

Проектируя уравнение (80) на n, получим

$$m\frac{v^2}{r} = F_n + R_n,$$

или на основании предыдущей формулы

$$m\frac{v^2}{r_0} = (F_n + R_n)\cos\varphi.$$

[1]) Шарль Мёнье де ля Пляс (Charle Meusnier de la Place) родился в Туре в 1752 г., был офицером французских инженерных войск и достиг звания дивизионного генерала. Умер от ранения близ Майнца в 1793 г. Был членом Парижской Академии наук и сделался известным благодаря своему Mémoire sur la courbure des surfaces, *Mém. des Sav. étrang.*, 1776.

Но так как обе нормали N и n ортогональны к касательной t, а вектор $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$ лежит в соприкасающейся плоскости tn траектории и может быть разложен по направлениям t и n, то имеем

$$F_N + R_N = (F_n + R_n)\cos\varphi.$$

Из этого и из предыдущего равенств, имея в виду, что R_N по своей абсолютной величине дает величину R реакции, мы получим формулу

$$R_N = \pm R = \frac{mv^2}{r_0} - F_N.$$

44. Движение по инерции*). Если предположим, что *активные силы равны нулю*, т. е. что движение точки P по поверхности σ происходит благодаря начальной скорости (и реакции поверхности), то *траекторией движущейся точки будет геодезическая линия, описываемая с постоянной скоростью.*

Действительно, ускорение, как мы знаем, находится в соприкасающейся плоскости траектории, в ней же будет лежать и сила. Так как эта последняя сводится к реакции, которая в силу предположения об отсутствии трения будет всегда нормальной к поверхности, то траектория необходимо должна быть геодезической линией.

Кроме того, так как сила, а вместе с ней и ускорение, всегда направлены по главной нормали к траектории, то отсюда следует, что касательная составляющая $\ddot{s}$ ускорения постоянно равна нулю и, следовательно, движение является равномерным.

То же самое следует и из теоремы (81) живых сил, которая вследствие того, что активная сила равна нулю, сводится здесь к равенству $dT=0$, откуда следует, что T, а потому и скорость v постоянны.

---

*) Рассматриваемое здесь движение точки по поверхности без участия активных сил по установившейся в нашей научной литературе традиции называется *движением по инерции* (Г. К. Суслов, „Теоретическая механика", 1946, стр. 207 и сл., 521 и сл.). Основанием для этого служит то обстоятельство, что величина скорости точки в таком движении не изменяется, а траекторией точки является геодезическая линия; такое же движение совершает свободная материальная точка по отношению к инерциальной системе отсчета, если не действуют никакие силы, т. е. при движении по инерции в собственном смысле слова.

Авторы называют движение без участия активных сил спонтанным (spontaneus — самопроизвольный) и различают движение по инерции от спонтанного движения; основание для этого заключается в том, что при спонтанном движении ускорения не равны нулю, а при движении по инерции в тесном смысле слова они равны нулю.

При переводе мы сохранили установившуюся у нас терминологию. (*Прим. ред.*).

45. Предположим, в частности, что поверхность σ есть поверхность вращения; тогда всякая нормаль к ней пересекает ось, и в случае отсутствия активных сил, сила, сводящаяся здесь только к нормальной реакции, подходит к типу б) п. 2. В этом случае, следовательно, помимо *интеграла живых сил* (дающего постоянство скорости), будет иметь место также и *интеграл площадей* на плоскости, нормальной к оси вращения (относительно центра соответствующей параллели).

В следующем пункте мы покажем, какие выгоды получаются при интегрировании уравнений движения, если оба упомянутых первых интеграла существуют одновременно; здесь же мы выведем из них только известное геометрическое свойство геодезических линий поверхностей вращения.

Если за ось z возьмем ось вращения, то интеграл площадей примет известную форму

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const};$$

так как скорость v остается постоянной, то вдоль геодезической линии будем иметь

$$x\frac{\dot{y}}{v} - y\frac{\dot{x}}{v} = \text{const}. \tag{82}$$

С другой стороны, если, опустив из точки $P(x, y, z)$ геодезической линии перпендикуляр PQ на ось, обозначим через r радиус QP параллели, проходящей через P, то направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{QP}$ будут равны

$$\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ 0,$$

в то время как для касательной к параллели в точке P (ортогональной к QP и к оси z) эти направляющие косинусы будут равны

$$\mp\frac{y}{r},\ \pm\frac{x}{r},\ 0,$$

где выбор знака зависит от того, какое из двух направлений на касательной принимается за положительное. А так как равенство (82) можно написать в виде

$$r\left(-\frac{\dot{x}}{v}\frac{y}{r} + \frac{\dot{y}}{v}\frac{x}{r}\right) = \text{const},$$

то произведение радиуса r параллели на косинус угла, который геодезическая линия образует с параллелью, не изменяется вдоль одной и той же геодезической линии. Называя *азимутом* геодезической линии в любой ее точке угол, который она там составляет с меридианом (дополнительный для угла с параллелью), имеем: *вдоль геодезической линии произведение из радиуса параллели на синус азимута есть величина постоянная* (формула Клеро[1]).

46. Возьмем снова два первых интеграла:

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= v_0^2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c, \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

определенных ранее для движения точки P по поверхности вращения σ без трения и при отсутствии активных сил. Мы увидим, что благодаря наличию этих интегралов мы придем к интегрированию уравнений движения (и, следовательно, в частности, к определению геодезических линий поверхности вращения σ) посредством одной квадратуры, как мы это уже видели при аналогичных обстоятельствах для задачи о движении свободной точки под действием центральной силы (п. 8). Кроме того, так как требующееся здесь аналитическое исследование совершенно аналогично исследованию, которое было выполнено в случае центрального движения, мы можем несколько сократить изложение.

Возьмем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z, где ρ есть существенно положительное расстояние любой точки P от оси вращения z, θ есть угол полуплоскости zP, отсчитываемый как положительный при правом вращении относительно ориентированной оси z и z — обычная третья декартова координата точки P. Уравнение поверхности вращения в этих координатах имеет вид

$$\rho = f(z).$$

Принимая во внимание тождества

$$\left.\begin{aligned} v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2(1 + f'^2) + f^2\dot{\theta}^2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\theta} = f^2\dot{\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

оба первых интеграла (83) можно будет написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}^2(1 + f'^2) + f^2\dot{\theta}^2 &= v_0^2, \\ f^2\dot{\theta} &= c. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

[1]) Алексис Клод Клеро (Alexis Claude Clairaut) родился в Париже в 1713 г., умер там же в 1765 г.; необычайно рано проявил свой талант. Двенадцати лет читал мемуар по теории кривых в Парижской Академии наук и восемнадцати лет был принят в ее члены. Непосредственный продолжатель Ньютона во Франции он построил систематическую теорию движения Луны, выполняя и табулируя числовые выкладки. Принимал участие во французской экспедиции по измерению градуса в Лаппонии в 1736—1737 гг. Можно сказать, что своей классической работой Théorie de la figure de la Terre Клеро положил начало высшей геодезии.

Здесь мы положили $df/dz = f'$. Если постоянная площадей c равна нулю и ρ тоже постоянно равно нулю (для чего требуется, чтобы координата z была и оставалась нулем функции $f(z)$), то из первого из уравнений (85) будем иметь $v_0 = 0$, и движущаяся точка P будет оставаться в равновесии в одной из точек пересечения поверхности вращения со своей осью.

Если, далее, $c = 0$, но ρ не постоянно равно нулю, то из интеграла площадей найдем $\dot{\theta} = 0$ и, следовательно, $\theta = \mathrm{const}$. Это значит, что точка P движется по одному из меридианов с постоянной по модулю скоростью v_0.

Если предположим теперь, что $c \neq 0$, то из интеграла площадей, как и в п. 6, найдем, что угол θ будет монотонной функцией времени. При этом всегда можно выбрать положительное направление отсчета угла θ вокруг оси z таким образом, чтобы θ была возрастающей (или по крайней мере никогда не убывающей) функцией от t, или, что в сущности то же, предположить, что $c > 0$.

Вследствие однозначной обратимости функции $\theta(t)$ можно также и здесь принять за независимую переменную θ вместо t; если траектория определена, например путем выражения z в функции от θ, то закон движения можно получить посредством одной квадратуры из интеграла площадей.

Для определения траектории (геодезической линии на поверхности вращения) возьмем снова интеграл живых сил и, рассматривая в нем z как сложную функцию от t через θ: исключим $\dot{\theta}$ при помощи интеграла площадей. Для функции $z(\theta)$, которая определяет траекторию на поверхности, мы получим таким образом дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{f^2(v_0^2 f^2 - c^2)}{c^2(1 + f'^2)}, \tag{86}$$

являющееся уравнением обычного типа, интегрируемым посредством одной квадратуры; уравнение такого вида рассматривалось нами в § 6 гл. I.

Следовательно, к настоящему частному случаю применимы все выводы, к которым мы пришли в общем случае. Остановимся на истолковании для поверхности вращения результата, относящегося к наиболее интересному случаю, когда начальное значение z_0 координаты z заключено между двумя простыми нулями z_1 и z_2 функции $\Phi(z)$, представляемой правой частью уравнения (86), и функция $\Phi(z)$ остается между z_1 и z_2 положительной. Геодезическая линия, траектория точки, располагается в этом случае на поверхности вращения, между двумя параллелями с координатами z_1 и z_2, попеременно касаясь то одной, то другой параллели в точках, отстоящих друг от друга на один и тот же угол (апсидальный угол проекции траектории на плоскость $z = 0$).

Если, далее, начальное значение z_0 является кратным нулем функции $\Phi(z)$, то z будет оставаться постоянным, как бы ни изменялось θ, т. е. траектория движущейся точки на поверхности сводится к параллели.

§ 8. Движение без трения тяжелой точки по поверхности вращения с вертикальной осью

47. В этом случае также существуют оба первых интеграла, что позволяет свести задачу к квадратурам и вести рассуждения совершенно аналогично рассуждениям предыдущего пункта.

Отнесем поверхность вращения к той же системе координат и воспользуемся уравнением, выведенным в предыдущем пункте с единственным добавочным условием, что ось z направлена вниз.

Силу тяжести g, действующую на материальную точку P, массу которой, как обычно, примем за единицу, будем считать постоянной по величине и направлению. Так как такая сила имеет потенциал (отнесенный к единице массы) gz, то для нашей задачи будет иметь место интеграл живых сил

$$\frac{v^2}{2} - gz = E.$$

С другой стороны, так как речь идет о силе, всегда компланарной с осью z (наряду с реакцией), то существует также и интеграл площадей для плоскости $z=0$ (относительно начала)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c.$$

Эти первые интегралы, выраженные в цилиндрических координатах, на основании равенств (84) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\dot{z}^2(1+f'^2)+f^2\dot{\theta}^2\right]-gz=E, \\ f^2\dot{\theta}=c. \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Если положим $c=0$ и исключим возможные состояния равновесия в точках поверхности, расположенных на оси z ($\rho=0$), то получим $\theta=\text{const}$. Такое движение осуществляется в математическом маятнике (гл. I, пп. 33—41) и циклоидальном маятнике Гюйгенса (там же, п. 43). Движение будет определяться первым уравнением системы (87), которое здесь примет вид

$$\dot{z}^2 = \frac{2(E+gz)}{1+f'^2}.$$

Это уравнение обычного типа, изученного в § 6, гл. I, и поэтому оно может быть шаг за шагом исследовано путем приложения установленных там общих приемов; уравнение интегрируется одной квадратурой.