Если, далее, начальное значение z_0 является кратным нулем функции $\Phi(z)$, то z будет оставаться постоянным, как бы ни изменялось θ, т. е. траектория движущейся точки на поверхности сводится к параллели.

§ 8. Движение без трения тяжелой точки по поверхности вращения с вертикальной осью

47. В этом случае также существуют оба первых интеграла, что позволяет свести задачу к квадратурам и вести рассуждения совершенно аналогично рассуждениям предыдущего пункта.

Отнесем поверхность вращения к той же системе координат и воспользуемся уравнением, выведенным в предыдущем пункте с единственным добавочным условием, что ось z направлена вниз.

Силу тяжести g, действующую на материальную точку P, массу которой, как обычно, примем за единицу, будем считать постоянной по величине и направлению. Так как такая сила имеет потенциал (отнесенный к единице массы) gz, то для нашей задачи будет иметь место интеграл живых сил

$$\frac{v^2}{2} - gz = E.$$

С другой стороны, так как речь идет о силе, всегда компланарной с осью z (наряду с реакцией), то существует также и интеграл площадей для плоскости $z = 0$ (относительно начала)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c.$$

Эти первые интегралы, выраженные в цилиндрических координатах, на основании равенств (84) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\dot{z}^2(1+f'^2)+f^2\dot{\theta}^2\right]-gz&=E,\\ f^2\dot{\theta}&=c. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Если положим $c = 0$ и исключим возможные состояния равновесия в точках поверхности, расположенных на оси z ($\rho = 0$), то получим $\theta = \mathrm{const}$. Такое движение осуществляется в математическом маятнике (гл. I, пп. 33—41) и циклоидальном маятнике Гюйгенса (там же, п. 43). Движение будет определяться первым уравнением системы (87), которое здесь примет вид

$$\dot{z}^2 = \frac{2(E+gz)}{1+f'^2}.$$

Это уравнение обычного типа, изученного в § 6, гл. I, и поэтому оно может быть шаг за шагом исследовано путем приложения установленных там общих приемов; уравнение интегрируется одной квадратурой.

Если, далее, $c \neq 0$, то можно также и здесь предположить $c > 0$, и закон движения получится посредством одной квадратуры из интеграла площадей; точно так же легко определится и траектория, если выразить z в функции от θ. Для этой функции $z(\theta)$ тем же способом, как и в предыдущем пункте, найдем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{f^2[2(E+gz)f^2 - c^2]}{c^2(1+f'^2)}, \tag{88}$$

которое приводится к обычному типу, уже несколько раз встречавшемуся ранее. Излишне поэтому останавливаться на возможных случаях, которые могут представиться в отношении вида траектории на поверхности (траектория идет по поверхности между двумя параллелями, обращаясь вокруг оси в одну сторону, и касается попеременно то одной, то другой параллели, или же сводится к параллели), тем более, что мы к этому вернемся, когда будем разбирать замечательный частный случай, которым займемся в следующем пункте.

Заметим только, что формулы и рассуждения этого пункта без существенных изменений распространяются и на тот случай, когда точка, движущаяся по гладкой поверхности вращения, находится под действием консервативной силы, являющейся производной от некоторого потенциала U, который зависит только от z, или, на основании равенства $z = f(\rho)$, только от ρ, или, наконец, от положения движущейся точки на меридиане поверхности. С аналитической точки зрения все сведется к замене в формулах потенциала силы тяжести gz функцией U.

48. Сферический маятник. Под этим названием подразумевается материальная точка P, вынужденная двигаться по сфере с заданным центром O и заданным радиусом l.

Практически эта связь осуществляется посредством гибкой и нерастяжимой нити или посредством твердого стержня OP длины l, весом которого можно пренебречь и который может свободно вращаться вокруг O. Если мы отвлечемся от всякого пассивного сопротивления, оказываемого подвесом и окружающей средой (т. е. схематически, от трения о сферическую поверхность), то задача о движении сферического маятника будет не чем иным, как частным случаем задачи, изученной в предыдущем пункте.

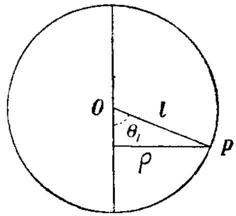
Чтобы сделать исследование более простым, предположим сначала, что подвес P осуществлен посредством твердого стержня (двусторонняя связь). Выберем начало координат в O и примем ту же систему отсчета, что и в предыдущем пункте; уравнение сферы в цилиндрических координатах имеет вид

$$\rho^2 = l^2 - z^2,$$

а два первых интеграла (87) принимают в данном случае форму

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\frac{l^2\dot{z}^2}{l^2-z^2}+(l^2-z^2)\dot{\theta}^2\right]-gz=E\\(l^2-z^2)\dot{\theta}=c.\end{aligned}\right\}\qquad(89)$$

При $c=0$ (исключая возможные состояния равновесия в самой нижней и самой высшей точках сферы) мы снова приходим к движению математического маятника (предыдущий пункт). Это можно проверить на формулах, замечая, что в этом случае движение определяется интегралом живых сил, в котором надо положить $\dot{\theta}=0$, т. е. уравнением



Фиг. 12.

$$\frac{1}{2}\frac{l^2\dot{z}^2}{l^2-z^2}-gz=E.$$

Если обозначим через θ_1 угол отклонения стержня от вертикали, то будем иметь (фиг. 12)

$$z=l\cos\theta_1,\quad \dot{z}=-l\dot{\theta}_1\sin\theta_1,$$

и предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}l^2\dot{\theta}_1^2-gl\cos\theta_1=E.$$

А это и есть выведенный ранее (п. 35 гл. I) интеграл живых сил для математического маятника.

49. Если предположить $c\neq0$ (и, как обычно, $c>0$) и принять за независимое переменное θ вместо t, то функция $z(\theta)$, определяющая на сфере траекторию маятника, будет решением дифференциального уравнения

$$c^2l^2\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2=(l^2-z^2)^2\left[2(gz+E)(l^2-z^2)-c^2\right],\qquad(90)$$

которое выводится уже неоднократно применявшимся способом из первых интегралов (89) или, проще, из уравнения (88), п. 47, если положить в нем

$$f(z)=\sqrt{l^2-z^2}.$$

Чтобы знать характер движения, необходимо, как обычно, принять во внимание распределение нулей функции, стоящей в правой части уравнения (90),

$$\Phi(z)=(l^2-z^2)\left[2(gz+E)(l^2-z^2)-c^2\right],$$

которые, кроме двух очевидных $z=\pm l$, определяются из уравнения третьей степени

$$\Phi_1(z)\equiv2(gz+E)(l^2-z^2)-c^2=0.$$

Заметим теперь, что при каком-нибудь движении маятника начальное значение z_0 переменной z, дающее „высоту“ точки на сфере, необходимо будет заключено между $-l$ и $+l$; при этом можно исключить случай, когда оно равно одному из этих крайних значений, так как, если бы было $z_0 = \pm l$, то из интеграла площадей, вычисленного для начала движения, получилось бы $c = 0$, и мы пришли бы к уже рассмотренному случаю. С другой стороны, для действительного движения должно быть $\Phi(z_0) \geqslant 0$, а следовательно, также и $\Phi_1(z_0) \geqslant 0$, так как мы уже имеем $l^2 - z_0^2 > 0$. Рассмотрим отдельно два случая: $\Phi_1(z_0) > 0$ и $\Phi_1(z_0) = 0$.

а) $\Phi_1(z_0) > 0$. В этом предположении функция $\Phi_1(z)$, принимающая при $z = \pm l$ отрицательное значение $-c^2$, необходимо имеет нуль z_1 между $-l$ и z_0 и другой нуль z_2 между z_0 и l. Так как, с другой стороны, функция $\Phi_1(z)$ при $z \to -\infty$ стремится к $+\infty$, то она допускает третий нуль z_3, меньший $-l$, откуда заключаем, что каждый из трех нулей оказывается простым. Интеграл уравнения (90) после подстановки начального значения z_0 (заключенного между двумя последовательными простыми нулями z_1 и z_2, между которыми функция $\Phi_1(z)$, а следовательно, и $\Phi(z)$ остается положительной) определяет функцию $z(\theta)$, колеблющуюся между значениями z_1 и z_2 таким образом, что всякий раз, когда она достигает одного из этих крайних значений, ее производная обращается в нуль: $\dfrac{dz}{d\theta} = 0$.

Интерпретируя этот результат, мы увидим, что маятник, обращаясь вокруг вертикали, остается внутри сферической зоны, заключенной между двумя параллелями с высотами z_1 и z_2, касаясь попеременно то одной, то другой параллели в точках, которые следуют друг за другом через равные угловые интервалы.

Необходимо отметить, что плоскость, равноудаленная от двух параллелей с высотами z_1 и z_2, будет всегда ниже экватора. Действительно, в силу известного соотношения между корнями и коэффициентами уравнения третьей степени имеем

$$z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -l^2 \quad \text{или же} \quad (z_1 + z_2) z_3 = -(l^2 + z_1 z_2).$$

Так как корни z_1 и z_2 по абсолютной величине оба меньше l и z_3 отрицателен, то заключаем, что $z_1 + z_2 > 0$, а следовательно, и $\dfrac{z_1 + z_2}{2} > 0$.

б) $\Phi_1(z_0) = 0$. Здесь необходимо различать два случая, смотря по тому, будет ли z_0 простым нулем функции Φ_1, или нет. В первом случае, так как всегда $\Phi_1(\pm l) = -c^2$, находим, смотря по тому, будет ли функция $\Phi_1(z_0)$ возрастающей или убывающей, что она допускает обязательно еще один корень, заключенный между z_0 и l, или соответственно между z_0 и $-l$. А так как всегда существует корень, меньший $-l$, то оба корня z_0, z_1 вместе с третьим будут простыми, и функция $\Phi_1(z)$ остается положительной, пока z остается внутри интервала (z_1, z_2). Поэтому мы снова находим движение типа, рассмотренного в п. а), с той только разницей, что здесь движущаяся точка вначале находится на одной из двух параллелей, ограничивающих зону, внутри которой извивается траектория.

Если, наконец, z_0 не является простым нулем функции $\Phi_1(z)$ (он может быть только двойным, поскольку всегда существует нуль, меньший $-l$), то из общей теории заключаем, что в течение всего движения будет иметь место равенство $z = z_0$, т. е. траектория оказывается параллелью с высотой z_0.

При помощи тех же соображений, которые были изложены в случае а), доказывается, что эта параллель расположена под экватором.

Отказываясь от продолжения интересных рассуждений, которые возникают при более точном разборе движения сферического маятника, мы ограничимся лишь указанием на то, что для этой цели удобно рассматривать проекцию траектории на экваториальную плоскость.

50. Вычисление реакции. Реакция R, которую развивает связь, наложенная на сферический маятник, во время движения, в силу предположения об отсутствии трения всегда направлена по прямой PO в ту или другую сторону. Она определяется из уравнения

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}, \tag{91}$$

где $\boldsymbol{a}$ обозначает ускорение точки P, и реакция $\boldsymbol{R}$ считается отнесенной к единице массы маятника.

Во время движения остается справедливым тождество

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = l^2,$$

из которого, беря последовательно два раза производную по времени и вводя скорость $\boldsymbol{v}$ точки P, получим

$$\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}^2 = 0;$$

исключая отсюда $\boldsymbol{a}$ при помощи равенства (91), имеем

$$\boldsymbol{v}^2 + \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{g} + \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{R} = 0.$$

Наконец, выполняя скалярное умножение и обозначая через R_N проекцию реакции $\boldsymbol{R}$ на нормаль PO сферы, направленную к центру (которая может отличаться от модуля R реакции только знаком, так как реакция $\boldsymbol{R}$ нормальна к поверхности сферы), получим

$$v^2 + gz - lR_N = 0.$$

Но из интеграла живой силы имеем

$$v^2 = 2(gz + E), \tag{92}$$

так что, исключая скорость, найдем

$$R_N = \frac{3gz + 2E}{l}. \tag{93}$$

Впрочем, к этому результату можно прийти значительно быстрее, применяя общую формулу, выведенную в п. 43 (надо помнить, что здесь $m = 1$),

$$R_N = \frac{v^2}{r_0} - F_N.$$

Если вместо v^2 подставить ее величину, определяемую из интеграла живых сил (92), и принять во внимание, что в настоящем случае r_0 (радиус нормального сечения через касательную к траектории) равен l, а составляющая веса единицы массы F_N по нормали PO есть $-\frac{gz}{l}$, то получится как раз формула (93).

Заметим, кроме того, что если вводится, как в п. 48, угол θ_1 маятника P с осью Oz в плоскости меридиана, то достаточно положить $z = l\cos\theta_1$, чтобы формула (93) приняла вид

$$R_N = 3g\cos\theta_1 + 2\frac{E}{l}.$$

Если примем во внимание, что выше (п. 35, гл. I) мы положили $e = \frac{E}{gl}$, то это равенство становится тождественным с выражением, полученным в п. 39 для реакции в случае математического маятника.

51. Равенство (93) показывает, что реакция R_N будет положительной, если высота точки P больше $-\frac{2E}{3g}$, и отрицательной, если она меньше $-\frac{2E}{3g}$, т. е. реакция направлена или от точки P к центру подвеса O, или в противоположную сторону. Если точка P в своем движении достигает параллели (которую можно назвать критической) с высотой

$$z = -\frac{2}{3}\frac{E}{g}$$

(зависящей от полной энергии E и, следовательно, от начальных условий рассматриваемого движения), то реакция обращается в нуль.

Если подвес маятника физически осуществлен посредством твердого стержня (двусторонняя связь), то эти различные возможности все в одинаковой мере совместимы с такой постановкой задачи. При этом стержень испытывает растяжение или сжатие, смотря по тому, находится ли точка ниже или выше критической параллели, и, как говорят, „не работает" в те моменты, когда точка достигает этой параллели, и R_N исчезает.

Движение будет несколько иным, если маятник подвешен на нити, так как в этом случае односторонняя связь действует только до тех пор, пока R_N остается положительной, т. е. до тех пор, пока точка остается ниже критической параллели (соответствующей рассматриваемому движению). Если P в своем движении достигает этой параллели, то в этот момент связь перестает действовать и остается только сила тяжести. Если же в непосредственно следующий за этим момент нить благодаря действию на маятник силы тяжести останется ненатянутой, то точка будет двигаться свободно под действием силы тяжести, описывая дугу параболы (или, в частности, отрезок прямой), которая плавно сопрягается (см. п. 39 гл. I) с предшествующей дугой траектории на сфере. Это параболическое движение будет продолжаться до того момента, когда нить снова будет натянута; с этого момента начнется новая фаза движения по законам сферического маятника.

Не входя в подробное исследование этого вопроса, заметим (это, впрочем, ясно и из интуитивных соображений), что реакция R_N, конечно, остается положительной, пока движущаяся точка находится ниже точки подвеса O, т. е. при $z > 0$. Действительно, если рассматриваемое движение таково, что полная энергия E положительна (или равна нулю), то неравенство $z > -\frac{2E}{3g}$ непосредственно выполняется при $z > 0$. Если же $E < 0$, то критическая параллель, имея положительную высоту, будет, конечно, ниже точки O, но точка P в своем движении не может уже ее достигнуть, потому что при наличии интеграла (92) живых сил в любой момент должно быть $z > -\frac{E}{g}$, а следовательно, и тем более $z > -\frac{2E}{3g}$.

Из предыдущего рассуждения следует, что движениями, которые могут дать начало параболическому движению, оказываются только те, полная энергия которых положительна. С другой стороны, исключаются и движения простого вращения около вертикали точки O, потому что, как мы видели в п. 49, параллель, описываемая точкой P, будет всегда ниже точки O.

Поэтому имеет смысл исследовать возможность указанного выше критического положения только для таких движений, для которых полная энергия была бы положительна, а масса маятника при замене нити стержнем совершала бы движение по сфере между двумя параллелями, верхняя из которых была бы выше центра O.

52. Малые колебания сферического маятника около положения устойчивого равновесия. Пусть для сферического маятника положение M на нисходящей от точки подвеса O вертикали является положением устойчивого равновесия (действительный максимум потенциала), так что масса маятника, предоставленная самой себе в положении, достаточно близком к M, с достаточно малой скоростью (или с достаточно малой живой силой), будет бесконечно долго колебаться в непосредственной близости от M со скоростью (или с живой силой), которая не будет превосходить некоторого произвольного, наперед заданного предела. Чтобы изучить характер этих малых колебаний, отнесем их к системе осей с началом в точке M и с осью z, направленной по вертикали вниз (оси x, y будут, следовательно, горизонтальными).

При этой системе координат уравнение сферы (с центром в точке $0, 0, -l$ и с радиусом l), по которой движется точка P, будет

$$x^2+y^2+(z+l)^2-l^2=0. \tag{94}$$

Если, как это соответствует характеру задачи, будем рассматривать отношения

$$\frac{x}{l},\ \frac{y}{l}$$

как малые количества первого порядка, то из равенства (94), написанного в виде

$$\frac{z}{l}=-1+\left(1-\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

следует, что отношение z/l есть величина (2) второго порядка, а потому им можно пренебречь по сравнению с отношениями x/l, y/l. Отсюда следует, что в первом приближении малые колебания массы маятника P можно отождествить с колебаниями ее ортогональной проекции на плоскость $z=0$.

С другой стороны, можно уточнить условие медленности, которое входит в определение малых колебаний, допуская, что верхний предел V скорости проекции точки P мал по сравнению со скоростью падения $\sqrt{2lg}$ тяжелого тела с высоты, равной длине маятника, т. е. рассматривая как величину первого порядка также и отношение

$$\frac{V}{\sqrt{2lg}}.$$

Если мы продифференцируем по времени равенство (94) и разделим результат на lV, то, пренебрегая членом с множителем z/l, получим

$$-\frac{\dot{z}}{V}=\frac{x}{l}\frac{\dot{x}}{V}+\frac{y}{l}\frac{\dot{y}}{V},$$

откуда видно, что $\dot{z}/V$ будет величиной первого порядка; после чего, вторично дифференцируя уравнение (94) и полагая $\dot{z} = V(1)$, мы придем опять с точностью до члена с z/l к соотношению

$$-\frac{\ddot{z}}{g} = \frac{v^2}{lg} + \frac{V^2}{lg}(2) + \frac{x}{l}\frac{\ddot{x}}{g} + \frac{y}{l}\frac{\ddot{y}}{g}.$$

Если примем во внимание, что

$$v^2 \leqslant V^2 + \dot{z}^2 = V^2\left(1 + \frac{\dot{z}^2}{V^2}\right),$$

то увидим, что v^2/lg будет величиной второго порядка.

Так как при колебаниях и горизонтальные ускорения $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ будут по отношению к g также малыми, так что отношения $\ddot{x}/g$, $\ddot{y}/g$ сами будут величинами первого порядка, то все члены этого выражения для $\ddot{z}/g$ оказываются порядка выше первого; и в первом приближении мы имеем просто $\ddot{z} = 0$.

Спроектируем теперь уравнение (91) движения маятника на оси x, y, z. Так как составляющие реакции $\boldsymbol{R}$ пропорциональны частным производным от левой части уравнения связи (94), то, обозначая через λ обычный множитель Лагранжа, мы получим три уравнения:

$$\ddot{x} = \lambda x, \quad \ddot{y} = \lambda y, \quad \ddot{z} = \lambda(z + l) + g. \tag{95}$$

Из последнего из этих уравнений, поскольку мы принимаем $z = \ddot{z} = 0$, следует

$$\lambda = -\frac{g}{l}.$$

Подставляя это значение λ в первые два уравнения, мы заключаем, что малые колебания сферического маятника (на горизонтальной плоскости около положения устойчивого равновесия) определяются двумя уравнениями

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0.$$

Речь идет, следовательно, об эллиптическом периодическом движении точки, притягиваемой центром M с силой, величина которой пропорциональна расстоянию (п. 10); когда начальная скорость проходит через M или равна нулю, то колебания будут просто прямолинейными.

§ 9. Маятник Фуко

53. В предыдущих пунктах (48—52) мы изучали движение сферического маятника относительно осей, неизменно связанных с Землей, рассматривая ее как неподвижную. Поэтому полученные результаты