откуда видно, что $\dot{z}/V$ будет величиной первого порядка; после чего, вторично дифференцируя уравнение (94) и полагая $\dot{z} = V(1)$, мы придем опять с точностью до члена с z/l к соотношению

$$-\frac{\ddot{z}}{g} = \frac{v^2}{lg} + \frac{V^2}{lg}(2) + \frac{x}{l}\frac{\ddot{x}}{g} + \frac{y}{l}\frac{\ddot{y}}{g}.$$

Если примем во внимание, что

$$v^2 \leqslant V^2 + \dot{z}^2 = V^2\left(1 + \frac{\dot{z}^2}{V^2}\right),$$

то увидим, что v^2/lg будет величиной второго порядка.

Так как при колебаниях и горизонтальные ускорения $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ будут по отношению к g также малыми, так что отношения $\ddot{x}/g$, $\ddot{y}/g$ сами будут величинами первого порядка, то все члены этого выражения для $\ddot{z}/g$ оказываются порядка выше первого; и в первом приближении мы имеем просто $\ddot{z} = 0$.

Спроектируем теперь уравнение (91) движения маятника на оси x, y, z. Так как составляющие реакции $\boldsymbol{R}$ пропорциональны частным производным от левой части уравнения связи (94), то, обозначая через λ обычный множитель Лагранжа, мы получим три уравнения:

$$\ddot{x} = \lambda x, \quad \ddot{y} = \lambda y, \quad \ddot{z} = \lambda(z + l) + g. \tag{95}$$

Из последнего из этих уравнений, поскольку мы принимаем $z = \ddot{z} = 0$, следует

$$\lambda = -\frac{g}{l}.$$

Подставляя это значение λ в первые два уравнения, мы заключаем, что малые колебания сферического маятника (на горизонтальной плоскости около положения устойчивого равновесия) определяются двумя уравнениями

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0.$$

Речь идет, следовательно, об эллиптическом периодическом движении точки, притягиваемой центром M с силой, величина которой пропорциональна расстоянию (п. 10); когда начальная скорость проходит через M или равна нулю, то колебания будут просто прямолинейными.

§ 9. Маятник Фуко

53. В предыдущих пунктах (48—52) мы изучали движение сферического маятника относительно осей, неизменно связанных с Землей, рассматривая ее как неподвижную. Поэтому полученные результаты сохраняют свое значение только до тех пор (см. п. 24), пока мы пренебрегаем членами порядка величины угловой скорости ω суточного вращения Земли.

Теперь, очевидно, будет интересно рассмотреть задачу о движении сферического маятника, учитывая это вращение, или, по крайней мере, подойти к дальнейшему приближению, которое было бы достаточным для выявления в относительном движении сферического маятника (по отношению к Земле) некоторых особенностей, доступных опытной проверке, которые отличают его от движения, изученного раньше, т. е. от движения, которое наблюдалось бы, если бы Земля была в покое (или в прямолинейном и равномерном поступательном движении) относительно неподвижных звезд.

Покажем, что для этой цели достаточно приближение, охарактеризованное в п. 25 и затем уточненное в предыдущем пункте.

Другими словами, достаточно рассмотреть одновременно обе схемы задачи, к которым мы пришли при изучении, с одной стороны, влияния вращения Земли на падение тяжелого тела (пп. 24—26), с другой стороны, малых колебаний сферического маятника, без учета движения Земли (предыдущий пункт).

Таким образом, мы придем к результатам, которые экспериментально впервые были проверены Фуко [1]) в 1851 г. Точнее, мы покажем, что если сферический маятник предоставлен самому себе без начальной скорости в положении, близком к положению равновесия, то его колебания (которые, если бы Земля была в покое, происходили бы всегда в одной и той же вертикальной плоскости) будут прогрессивно смещаться из первоначальной плоскости или, как, можно сказать, выражаясь менее точно, но более наглядно, *плоскость колебаний будет равномерно* вращаться вокруг вертикали места в направлении с востока на запад через юг.

54. Выбрав, как в п. 52, начало координат в положении устойчивого равновесия M колеблющейся точки P, относительно которой мы предположим для определенности, что она находится в северном полушарии, проведем оси координат, связанные с Землей, как в п. 26, т. е. ось z направим по вертикали места вниз, а ось x — в плоскости меридиана точки M на север, так что ось y будет перпендикулярна к плоскости меридиана точки M и направлена на восток.

Здесь, так же как в § 4, при заданной длине l маятника точка P вынуждена двигаться по поверхности сферы с центром в точке O,

---

[1]) Леон Фуко (Leon Foucault) родился в Париже в 1819 г., умер там же в 1878 г., был астрономом Бюро долгот и обсерватории в Париже и членом Парижской Академии наук. Производил важные экспериментальные исследования в сотрудничестве с Реньо, Физо и др.; прославился прямым определением скорости света.

с координатами $0, 0, -l$ и с радиусом l, уравнение которой имеет вид

$$x^2+y^2+(z+l)^2-l^2=0. \tag{94}$$

Действительно, если маятник, как это было в опыте Фуко, подвешен на нити, то связь будет односторонней, но так как мы будем рассматривать только очень малые колебания, то можно быть уверенными (п. 51), что если нить в начале движения предполагается натянутой, то благодаря действию силы тяжести на колеблющуюся точку она будет оставаться натянутой во все время движения.

Поэтому точка P, массу которой для простоты примем равной единице, будет двигаться так, как если бы она была свободна и находилась под совместным действием веса и реакции связи $\boldsymbol{R}$. Поэтому, используя замечания § 4 и принимая во внимание изложенные там рассуждения (п. 24), можно написать дифференциальное уравнение движения в векторной форме

$$\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{g}-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r, \tag{96}$$

которое от уравнения (45′) движения тяжелого тела относительно Земли отличается только наличием реакции $\boldsymbol{R}$. Это, очевидно, не опровергает того, что в только что упомянутом случае (п. 25) мы условились рассматривать силу тяжести $\boldsymbol{g}$ как постоянную по величине и по направлению. Отсюда, проектируя уравнение (96) на оси x, y, z и вводя для составляющих реакции обычный множитель Лагранжа λ, мы придем к трем скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=\lambda x-2\dot{y}\omega\sin\gamma,\\ \ddot{y}&=\lambda y+2\omega(\dot{x}\sin\gamma+\dot{z}\cos\gamma),\\ \ddot{z}&=\lambda(z+l)+g-2\dot{y}\omega\cos\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{96′}$$

в которых g представляет вес единицы массы в данном месте на поверхности Земли и γ — географическую широту места (т. е. угол вертикали, проходящей через точку M с экваториальной плоскостью Земли).

Здесь представляется естественным сопоставить эти уравнения с уравнениями, которые мы получили в предыдущем пункте при изучении малых колебаний сферического маятника около M, без учета вращения Земли. Третье уравнение системы (96′) отличается от аналогичного уравнения системы (95) только наличием вертикальной составляющей $-2\dot{y}\omega\cos\gamma$ сложной центробежной (кориолисовой) силы. Теперь, так как можно написать

$$\frac{\dot{y}\omega}{g}=\sqrt{2}\,\frac{\dot{y}}{V}\,\frac{V}{\sqrt{2lg}}\sqrt{\frac{\omega^2 l}{g}}$$

и отношения $\frac{V}{\sqrt{2lg}}$ (п. 52) и $\frac{\omega^2 l}{g}$ (п. 25) должны рассматриваться как количества соответственно первого и второго порядка, мы видим, что добавочный член $-2\dot{y}\omega\cos\gamma$ будет типа $g(2)$ и поэтому в первом приближении им можно пренебречь по сравнению с g.

С другой стороны, остаются в силе оценки порядка величин, которые в п. 52 привели нас к отождествлению малых колебаний точки P с колебаниями ее проекции на горизонтальную плоскость, проходящую через точку M ($z=0$). Эти же оценки позволяют рассматривать вертикальное ускорение $\ddot{z}$ точки P как ничтожное по сравнению с g; так что третье из уравнений (96'), как и аналогичное уравнение системы (95), сводится к уравнению

$$\lambda l + g = 0;$$

двум первым уравнениям можно придать вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x - 2\dot{y}\omega\sin\gamma, \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y + 2\omega(\dot{x}\sin\gamma + \dot{z}\cos\gamma). \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Но так как

$$\dot{x}\sin\gamma + \dot{z}\cos\gamma = \dot{x}\sin\gamma\left(1 + \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\operatorname{ctg}\gamma\right)$$

и в то же время $\dot{z}$ есть величина типа $V(1)$, а $\dot{x}$ сравнима с V (п. 52), то во втором из уравнений (97) можно пренебречь в первом приближении членом $2\omega\dot{z}\cos\gamma$ по сравнению с остальными, поэтому, полагая $\omega_1 = \omega\sin\gamma$, мы заключаем, что малые колебания точки P или, лучше, ее проекции Q на горизонтальную плоскость $z=0$ определяются двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x - 2\dot{y}\omega_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y + 2\dot{x}\omega_1. \end{aligned} \tag{98}$$

Эти уравнения, если обозначить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ ускорение и скорость (горизонтальную) точки Q и через $\boldsymbol{k}$ единичный вектор вертикали, направленной вниз, можно объединить в одно векторное уравнение

$$\boldsymbol{a} = -\frac{g}{l}\overrightarrow{MQ} + 2\omega_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}. \tag{98'}$$

Рассмотрим теперь в плоскости $z=0$ систему прямоугольных осей x_1y_1 с началом в точке M, конгруентную с системой xy и вращающуюся вокруг M с постоянной угловой скоростью ω_1 в направлении xy (т. е. в направлении движения стрелки часов с горизонтальным, обращенным вверх циферблатом). Векторная угловая скорость плоскости x_1y_1 относительно плоскости xy, очевидно, равна $\omega_1\boldsymbol{k}$. Отсюда, обратно, векторная угловая скорость xy относительно x_1y_1 равна $-\omega_1\boldsymbol{k}$. Для ускорения $\boldsymbol{a}_1$ относительно осей x_1y_1 проекции Q точки P, которая относительно осей xy имеет скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\boldsymbol{a}$, на основании теоремы Кориолиса (в применении к равномерному переносному вращательному движению, т. I, гл. IV, п. 4, б) мы получим выражение

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a} - \omega_1^2\overrightarrow{MQ} - 2\omega_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}.$$

Отсюда, если примем во внимание (98′), получим

$$\boldsymbol{a}_1 = -\left(\frac{g}{l}+\omega_1^2\right)\overrightarrow{MQ}$$

или же, наконец, пренебрегая величиной ω_1^2 по сравнению с $\frac{g}{l}$, что возможно, получим

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{g}{l}\overrightarrow{MQ}. \tag{99}$$

Мы видим, что *относительно вращающихся осей* x_1y_1 горизонтальная проекция Q точки P колеблется так, как если бы она притягивалась точкой M с силой, по величине пропорциональной расстоянию, т. е. по тому же самому закону, который мы в п. 52 нашли, отвлекаясь от вращения Земли, для малых колебаний сферического маятника по отношению к земным осям. Как мы уже знаем, траектория, которую описывает точка Q согласно уравнению (99) относительно осей x_1y_1, есть эллипс, в некоторых случаях вырождающийся в отрезок прямой (п. 10), а уравнения движения во всех случаях будут иметь вид

$$x_1 = r_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\theta_1\right),\quad y_1 = r_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\theta_2\right), \tag{100}$$

где произвольные постоянные r_1, r_2, θ_1, θ_2 определяются по начальным условиям. Здесь мы выберем эти условия таким образом, чтобы учесть обстановку, в которой был проведен опыт Фуко, упомянутый в самом начале. Фуко, подвесив под куполом парижского Пантеона длинный маятник ($l=67$ *м*) с очень тяжелой колеблющейся массой (30 *кг*), вывел его из состояния равновесия OM и укрепил его в слегка отклоненном положении OP_0, привязав посредством нити груз P к стенке. В заданный момент, который мы примем за начало отсчета времени $t=0$, он пережег нить, и таким образом масса P начала колебаться с начальной скоростью (по отношению к окружающей среде, т. е. к Земле), равной нулю.

Поэтому, обозначая через a расстояние точки P_0 от вертикали $OM=z$ и предполагая, что в момент $t=0$ вращающаяся ось x_1 проходит через Q (проекция точки P_0 на плоскость $z=0$), положим в этот начальный момент $x_1 = a$, $y_1 = 0$. Так как, далее, в начале движения должно быть $\dot{x} = \dot{y} = 0$, а по теореме об относительном движении, поскольку $\omega_1 \boldsymbol{k}$ есть угловая скорость осей $x_1 y_1$ относительно осей xy, мы имеем (т. I, гл. IV, п. 4, б)

$$\dot{x} = \dot{x}_1 - \omega_1 y_1, \quad \dot{y} = \dot{y}_1 + \omega_1 x,$$

то при $t = 0$ мы должны положить $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = -\omega_1 a$. Таким образом, окончательные уравнения движения (100) проекции Q точки P на плоскость $z = 0$ по отношению к вспомогательным осям $x_1 y_1$ принимают вид

$$x_1 = a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right), \quad y_1 = -\omega_1 a \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right),$$

так что эллиптическая траектория точки Q определяется уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{g y_1^2}{\omega_1^2 a^2 l} = 1.$$

Так как полуоси эллипса равны соответственно a и $\omega_1 a \sqrt{l/g}$ и вторая из них очень мала по сравнению с первой, то речь идет об очень сплюснутом эллипсе, который можно уподобить отрезку оси x_1. Поэтому на первый взгляд движение маятника по отношению к осям x, y, z будет обыкновенным колебательным движением в плоскости zx_1; но эта плоскость не неподвижна, а имеет угловую скорость $\omega \sin \gamma$ в направлении xy, которое для лица, смотрящего сверху, будет направлением движения часовой стрелки, т. е. с востока на запад через юг. Хотя эта угловая скорость мала, но угол поворота плоскости колебаний растет непрерывно с временем и становится довольно скоро заметным.

Естественно, что величина $\omega_1 = \omega \sin \gamma$ изменяется вместе с широтой места; максимальной и равной ω она будет на северном полюсе и равной нулю на экваторе. Чтобы перейти в южное полушарие, достаточно изменить знак у γ, и единственная разница в выводах будет заключаться лишь в том, что вращение плоскости колебаний будет совершаться для смотрящего сверху в направлении, обратном движению часовой стрелки.

Чтобы дать понятие о порядке величины ω_1 в средних широтах, заметим, что в местах, где географическая широта, т. е. γ, приблизительно равна 45°, угловое смещение за один час будет равно $\frac{2\pi \sin 45^\circ}{24}$, т. е. немного меньше 10°.

Как уже было сказано, указанные выше выводы теории были подтверждены опытом Фуко, который является поэтому опытным доказательством суточного вращения Земли. По сравнению с отклонением падающего тела к востоку, которое мы приводили как первое доказательство того же самого факта, опыт Фуко представляет существенное преимущество, так как он, так сказать, накапливает очень малые сами по себе воздействия, которые вращение Земли производит на движение тяжелого тела, и делает их, таким образом, доступными для наблюдения и количественного учета.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка, масса которой равна m, движется в плоскости Oxy под действием силы с составляющими $X=\frac{\partial V}{\partial y}$, $Y=-\frac{\partial V}{\partial x}$, где V — какая-нибудь функция от x, y. Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл вида $m\dot{x}\dot{y}-V=\text{const}$.

2. Материальная точка P, масса которой равна m, движется под действием двух сил, направленных к двум неподвижным точкам O и O_1, с величинами $m\mu r$ и $m\mu_1 r_1$, где $r=OP$, $r_1=O_1P$, а μ, μ_1 суть постоянные. Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл

$$\mu r^2\dot{\theta}+\mu_1 r_1^2\dot{\theta}_1=\text{const},$$

где θ, θ_1 означают углы радиусов-векторов OP, O_1P с OO_1.

3. Свободная материальная точка движется под действием силы $\boldsymbol{F}$ (отнесенной к единице массы), зависящей только от положения. Фиксируем одно из движений, возможных в этих условиях, и пусть c есть дуга соответствующей траектории. Показать, что эта дуга c может также рассматриваться как конфигурация равновесия гибкой и нерастяжимой нити, закрепленной на концах и находящейся под действием единичной силы $-\boldsymbol{F}$, в предположении, что линейная плотность нити в любом месте обратно пропорциональна скорости точки в рассматриваемом решении динамической задачи.

4. Из соотношения $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ в случае силы, зависящей только от положения, путем дифференцирования выводится

$$m\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\dot{z}.$$

Дифференцируя дальше, доказать, что разложения в ряд Тэйлора декартовых координат x, y, z движущейся точки из состояния покоя и с момента $t=0$ будут типа

$$x=X\tau+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial X}{\partial x}X+\frac{\partial X}{\partial y}Y+\frac{\partial X}{\partial z}Z\right)\tau^2+\ldots$$

и аналогично для y и z, где X, Y, Z суть составляющие силы $\boldsymbol{F}$, $\tau=\frac{t^2}{2}$, а опущенные члены — по крайней мере шестого порядка по отношению к t.

5. Точка движется в плоскости под действием силы, являющейся производной от потенциала $U(x, y)$. Доказать, что совокупность (пучок) траекторий, соответствующих одному и тому же значению E постоянной энергии, определяется дифференциальным уравнением

$$y''+(1+y'^2)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}-y'\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)=0,$$

где x, y обозначают декартовы координаты и

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \lambda=\ln\sqrt{2(U+E)}.$$