накапливает очень малые сами по себе воздействия, которые вращение Земли производит на движение тяжелого тела, и делает их, таким образом, доступными для наблюдения и количественного учета.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка, масса которой равна m, движется в плоскости Oxy под действием силы с составляющими $X=\frac{\partial V}{\partial y}$, $Y=-\frac{\partial V}{\partial x}$, где V — какая-нибудь функция от x, y. Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл вида $m\dot{x}\dot{y}-V=\text{const}$.

2. Материальная точка P, масса которой равна m, движется под действием двух сил, направленных к двум неподвижным точкам O и O_1, с величинами $m\mu r$ и $m\mu_1 r_1$, где $r=OP$, $r_1=O_1P$, а μ, μ_1 суть постоянные. Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл

$$\mu r^2\dot{\theta}+\mu_1 r_1^2\dot{\theta}_1=\text{const},$$

где θ, θ_1 означают углы радиусов-векторов OP, O_1P с OO_1.

3. Свободная материальная точка движется под действием силы F (отнесенной к единице массы), зависящей только от положения. Фиксируем одно из движений, возможных в этих условиях, и пусть c есть дуга соответствующей траектории. Показать, что эта дуга c может также рассматриваться как конфигурация равновесия гибкой и нерастяжимой нити, закрепленной на концах и находящейся под действием единичной силы $-F$, в предположении, что линейная плотность нити в любом месте обратно пропорциональна скорости точки в рассматриваемом решении динамической задачи.

4. Из соотношения $ma=F$ в случае силы, зависящей только от положения, путем дифференцирования выводится

$$m\frac{da}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}.$$

Дифференцируя дальше, доказать, что разложения в ряд Тэйлора декартовых координат x, y, z движущейся точки из состояния покоя и с момента $t=0$ будут типа

$$x=X\tau+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial X}{\partial x}X+\frac{\partial X}{\partial y}Y+\frac{\partial X}{\partial z}Z\right)\tau^2+\ldots$$

и аналогично для y и z, где X, Y, Z суть составляющие силы F, $\tau=\frac{t^2}{2}$, а опущенные члены — по крайней мере шестого порядка по отношению к t.

5. Точка движется в плоскости под действием силы, являющейся производной от потенциала $U(x, y)$. Доказать, что совокупность (пучок) траекторий, соответствующих одному и тому же значению E постоянной энергии, определяется дифференциальным уравнением

$$y''+(1+y'^2)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}-y'\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)=0,$$

где x, y обозначают декартовы координаты и

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \lambda=\ln\sqrt{2(U+E)}.$$

Для доказательства достаточно приравнять нулю выражение R_n, указанное в упражнении 8 гл. I, вспоминая, что направляющие косинусы нормали к кривой $y=y(x)$, направленной в сторону вогнутости, суть

$$\mp y'/\sqrt{1+y'^2}, \quad \pm 1/\sqrt{1+y'^2},$$

смотря по тому, будет ли $y''>0$ или $y''<0$ (радикалы подразумеваются взятыми в арифметическом смысле).

6. В виде непосредственного приложения уравнения (11) или эквивалентного ему уравнения (11') п. 7 этой главы доказать, что:

а) если точка описывает круговую орбиту в центральном движении, центр которого O находится на окружности, то сила, действующая на движущуюся точку, обратно пропорциональна пятой степени расстояния от O;

б) если эллипс описывается под действием центральной силы, центр которой совпадает с центром эллипса, то сила обратно пропорциональна расстоянию;

в) логарифмическая спираль $r=ae^{-b\theta}$ (a и b — постоянные) и лемниската $r^2=c^2\sin 2\theta$ (c — постоянная) могут быть описаны под действием центральной силы, действующей из начала координат и обратно пропорциональной в первом случае кубу, во втором — седьмой степени расстояния.

7. Точка P описывает эллипс под действием двух центральных сил, направленных к двум фокусам F, F'. Полагая $FP=r$, $F'P=r'$, показать, что если радиальная составляющая первой силы есть μr, то радиальная составляющая второй силы есть $\mu r'+\frac{\nu}{r'^2}$ (μ, ν — постоянные).

8. Показать, что величина центральной силы, которая заставляет материальную точку описывать заданную кривую согласно закону площадей, пропорциональна $\frac{v^2 r}{\rho}$, где v обозначает величину скорости движущейся точки, r — ее расстояние от центра силы, ρ — радиус кривизны заданной траектории.

9. Если радиальная составляющая центральной силы имеет выражение $\varphi(r)=\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}$ (μ и ν — постоянные), то дифференциальное уравнение траектории [(11'), п. 7)] интегрированием может быть приведено к виду

$$r=\frac{p}{1+e\cos k\theta},$$

где

$$k^2=1+\frac{\nu}{c^2}, \qquad \frac{1}{p}=-\frac{\mu}{c^2+\nu};$$

через c обозначена постоянная площадей, e есть постоянная интеграции, у которой можно предположить тот же самый знак, что и у p, заменяя при случае ϑ через $\vartheta+\pi$; вторая постоянная интеграции не входит явно, так как она включена в ϑ (которая заменяет $\vartheta-\vartheta_0$). Заметим, что указанная форма интеграла предполагает $k^2>0$ или же $c^2>-\nu$. Как надо изменить ее, если $c^2\leqslant-\nu$?

Если примем $k>0$, то орбита, очевидно, будет иметь апсидальный угол $\Theta=\frac{\pi}{k}$.

При $\nu=0$ получим $k=1$; орбита будет коническим сечением с фокусом в центре силы, а при $\mu<0$ будем иметь классический случай ньютонианского притяжения, которому посвящена следующая глава.

Здесь мы хотим добавить еще одно замечание общего характера, которое восходит к Ньютону.

Если движущаяся точка P описывает какую-нибудь траекторию, а траектория вращается с угловой скоростью ω, изменяющейся как-либо с течением времени, то абсолютная угловая скорость вектора P определится равенством

$$\dot{\vartheta}=\dot{\vartheta}_1+\omega,$$

где ϑ есть угол вектора P с какой-либо неподвижной осью, ϑ_1 — угол вектора P с осью, неизменно связанной с вращающейся орбитой. Ничто не мешает предположить, в частности, что $\vartheta_1=k\vartheta$ при постоянном, наперед заданном k, так как достаточно в случае необходимости принять

$$\omega=(1-k)\dot{\vartheta}.$$

После этого предыдущее можно сделать более наглядным, указав, что для всякой центральной силы вида $\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}$ в предположении $c^2>-\nu$ орбита будет коническим сечением, вращающимся вокруг фокуса (центра силы) с переменной угловой скоростью $(1-k)\dot{\vartheta}$. Движение по этому коническому сечению будет происходить с постоянной секторной скоростью kc, следовательно, будет кеплеровым, если речь идет об эллипсе.

10. Показать, что задачу о движении точки, находящейся под действием силы, проходящей всегда через начало и имеющей радиальную составляющую вида $\frac{\psi(\theta)}{r^2(at+b)}$, где при очевидном значении символов t, r и θ буквы a и b обозначают постоянные, а ψ есть любая функция от одного только аргумента θ, можно свести к квадратурам. При $a=0$ будем иметь теорему Якоби, при $\psi=\text{const}$ — теорему Мещерского. См. G. Armellini, Sopra l'integrabilità delle equazioni differentiali della Meccanica *Rend. Lincei*, т. XXI, 1912, стр. 177—182, 2-й семестр. Для решения достаточно отправиться от уравнений (3) приведенной заметки, выражающих равенство между радиальной и трансверсальной составляющими ускорения и единичной силы.

11. Радиальная составляющая центральной силы есть $\varphi(r)=\nu+\mu r$ (μ и ν — постоянные). Показать, что если ω есть постоянная угловая скорость, с которой будет описываться круговая орбита, то эта орбита будет устойчивой, если $3\omega^2>\mu$. В этом случае соседние орбиты имеют апсидальный угол

$$\Theta=\frac{\pi\omega}{\sqrt{3\omega^2-\mu}}.$$

12. В случае вертикального движения снаряда уравнение (28) п. 14 этой главы принимает вид

$$\frac{dv}{dt}=\pm g-f(v);$$

знак плюс берется в случае нисходящего движения и минус — в случае восходящего. Приняв функцию сопротивления $f(v)$ удовлетворяющей качественным условиям п. 13, изучить качественно нисходящее движение, аналогично тому, как это было сделано в § 9 гл. I для функции, выражающей квадратичный закон сопротивления. Необходимо при этом различать три случая $v_0 \gtreqless v_1$, где v_0 означает начальную скорость и v_1 — предельную скорость, определяемую формулой (27) п. 13.

Если s есть расстояние, пройденное вдоль вертикали от начального положения, то интеграл задачи можно представить в виде

$$t = -\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\frac{f(v)}{g} - 1}, \quad s = -\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{\frac{f(v)}{g} - 1}.$$

Для восходящего движения имеем наоборот

$$t = -\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\frac{f(v)}{g} + 1}, \quad s = -\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{\frac{f(v)}{g} + 1}.$$

Изучить, в частности, случай сопротивления, пропорционального n-ой степени скорости, $f(v) = av^n$ (a — постоянная), и показать, что если за переменное интеграции принимается $\rho = \frac{v}{v_1}$, то правые части выразятся посредством интегралов вида

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{1 \mp \rho^n}, \quad \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{1 \mp \rho^n},$$

где $\rho_0 = \frac{v_0}{v_1}$. Если $n > 1$, то как бы ни была велика скорость v_0, с которой снаряд бросается кверху, он уже не поднимается выше, чем на высоту

$$h = \frac{v_1^2}{g}\int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{1 + \rho^n},$$

и достигнет своей максимальной высоты за конечное время, не превосходящее величины

$$\tau = \frac{v_1}{g}\int_0^{\infty} \frac{d\rho}{1 + \rho^n}.$$

Проверить, что аналогичные обстоятельства представятся при $f(v) = Ae^{mv}$ (A и m — постоянные) и что в этом случае будем иметь

$$\tau = \frac{1}{mg}\ln\left(1 + \frac{g}{A}\right).$$

13. Показать, что в случае сопротивления, пропорционального скорости баллистический годограф, определяемый уравнением (30) п. 14, есть прямая в плоскости v, φ (v — радиус-вектор, а φ — аномалия (угол наклона)).

14. Из формулы (26) п. 13 мы знаем, что если $f(v)$ есть сопротивление для заданного снаряда P, то сопротивление для подобного же снаряда P_1, соответствующее скорости v_1, есть $cf(v_1)$, где c обозначает постоянную.

Годографы, относящиеся к движениям P и P_1, называются подобными, если скорости, соответствующие одному и тому же углу наклона φ, находятся в постоянном отношении k. В таком случае то же относится и к углам, заключенным между любыми двумя наклонами, и к соответствующим промежуткам времени; следовательно, и траектории будут *подобными*.

Показать, что подобие возможно тогда и только тогда, когда сопротивление пропорционально некоторой степени скорости. Если n есть показатель этой степени, то имеем $\frac{v_1}{v}=k=\sqrt[n]{c}$. См. F. Siacci, Balistica, 2-е изд. Torino, 1888, ч. I, гл. VIII, стр. 112.

15. Уравнение (30) п. 14 непосредственно приводится к уравнению Бернулли и, следовательно, к квадратурам при $f(v)/g=a+bv^n$ (a, b, n — постоянные). Если принять в нем за неизвестное $\ln v$, то в случае

$$\frac{f(v)}{g}=a+b\ln v$$

оно становится линейным. Это случаи, указанные Даламбером в 1744 г., как было указано в п. 15.

Даламбер, кроме того, заметил, что если постоянные a, b, r связаны подходящим соотношением, то и два другие закона:

$$\frac{1}{g}f(v)=av^n+r+bv^{-n},\quad \frac{1}{g}f(v)=a\ln^2 v+r\ln v+b$$

приводят к случаям интегрируемости в квадратурах. Найти этот результат, замечая сначала, что если $x=\sin\varphi$ принимается за независимую переменную и $y=v^{n+1}$ или соответственно $y=\ln v$ — за неизвестную функцию, то мы придем к уравнению Риккати. Тогда достаточно будет исследовать, при каких условиях (для a, b, r) это уравнение допускает решение вида $\alpha x+\beta$ (α и β — постоянные).

16. В п. 20 доказаны различные геометрические свойства траектории снаряда. Аналогичными рассуждениями доказать следующее кинематическое предложение:

Всякая восходящая дуга будет пробегаться за меньшее время, чем соответствующая нисходящая дуга. (Соответствующими называются две дуги, заключенные между вершиной и точками с равными высотами.)

17. Принимая во внимание вращение Земли, убедиться, что тяжелое тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v, при возвращении на высоту бросания дает отклонение к западу, равное при обозначениях п. 26 $\frac{4\omega v^3\cos\gamma}{3g^2}$ (формула Лапласа).

18. Уравнение (45″) п. 26 движения тяжелого тела при условии, что принимается во внимание вращение Земли, можно строго проинтегрировать хорошо известным способом, поскольку речь идет о линейных уравнениях. В предположении, что тело предоставлено самому себе без начальной скорости, получим после первого интегрирования:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-2\omega y\sin\gamma,\\ \dot{y}&=2\omega(x\sin\gamma+z\cos\gamma),\\ \dot{z}&=gt-2\omega y\cos\gamma.\end{aligned}$$

Мы пришли к системе первого порядка, линейной относительно x, y, z. Не обращаясь к общей теории, достаточно в этом случае взять производную от второго уравнения и подставить в полученное уравнение вместо $\dot{x}$, $\dot{z}$ выражения, даваемые двумя другими. Мы придем, таким образом, к уравнению с одним только y, интеграл которого легко будет указать, и т. д.

19. Наэлектризованная частица P с массой m и зарядом e движется в электрическом и магнитном полях (статических). Их напряженности определены в каждой точке векторами E и M соответственно.

Если предположить, что движение частицы не изменяет силового поля, то оно (движение) согласно теории электромагнитного поля совершается по закону *)

$$ma = e(E + v \times M), \tag{1}$$

где v и a обозначают скорость и ускорение движущейся частицы.

Если электрическая напряженность E является производной от потенциала $U(x, y, z)$, то мы сразу же видим, что уравнение (1) допускает интеграл живых сил

$$\frac{mv^2}{2} - eU = \text{const}.$$

Уравнение (1), между прочим, дает теорию северного сияния, поскольку это явление рассматривается как происходящее вследствие видимости траекторий наэлектризованных частиц в поле земного магнетизма ($E = 0$, M соответствует однородно намагниченной сфере). С этой целью см. работы Штермера (C. Störmer) **).

В случае, когда M происходит от одного единственного полюса при E все еще равном нулю, равенство (1) важно для изучения катодных лучей и было проинтегрировано и иллюстрировано Пуанкаре ***).

Изучить в виде упражнения случай, когда E и M постоянны. Принимая ось Oz параллельной M и плоскость Oxz параллельной E, показать, что z есть квадратичная функция времени и что x определяется уравнением вида $\ddot{x} + \omega^2 x = \text{const}$ (ω — постоянная), которое интегрируется непосредственно, как в п. 61 гл. I.

Если, далее, считая все еще M постоянным, предположить, что сила E является центральной, то легко можно изучить движение, которое будет происходить в плоскости, нормальной к M и проходящей через центр O силы E. Достаточно обратиться к осям Oxy этой плоскости, вращающимся с угловой скоростью $-\frac{eM}{2m}$ вокруг точки O. Действительно, обозначая через b ускорение точки P относительно этих осей (относительно которых неподвижные оси вращаются с угловой скоростью $\frac{eM}{2m}$), по теореме Кориолиса будем иметь

$$b = a + \frac{e}{m} M \times v + a_\tau = a + \frac{e}{m} M \times v - \frac{e^2 M^2}{4m^2} \overrightarrow{OP},$$

откуда, в силу уравнения (1),

$$b = \frac{e}{m} E - \frac{e^2 M^2}{4m^2} \overrightarrow{OP}.$$

Если $U_1(z)$ есть потенциал центральной силы E (при $r = OP$), то движение точки P относительно подвижных осей происходит под действием силы,

*) См., например, Г. А. Лоренц, Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, 1934. *(Прим. ред.)*

**) См. К. Штермер, Проблема полярных сияний, 1933. *(Прим. ред.)*

***) См. П. Аппелль, Курс теоретической механики, т. I, 1911, гл. X, п. 221. *(Прим. ред.)*

тоже центральной, являющейся производной от потенциала, отнесенного к единице массы,

$$U(r)=\frac{e}{m}U_1(r)-\frac{e^2M^2}{8m^2}r^2.$$

20. Точка P притягивается к двум неподвижным центрам O_1, O_2 центральными силами, возрастающими вместе с расстоянием и исчезающими вместе с ним, с единичными радиальными составляющими — $\varphi_1(r_1)$, — $\varphi_2(r_2)$, где положено

$$r_1=O_1P,\ r_2=O_2P.$$

На отрезке O_1O_2, очевидно, находится одно положение O равновесия, в котором $\varphi_1(r_1)=\varphi_2(r_2)$. Доказать, что если речь идет об устойчивом равновесии и если линия центров принимается за ось, то при обозначениях п. 38 будем иметь

$$\omega_1^2=\varphi_1'+\varphi_2',\quad \omega_2^2=\omega_3^2=\frac{\varphi_1}{r_1}+\frac{\varphi_2}{r_2},$$

где подразумевается, что значения r и φ и их производных относятся к точке O.

Если притяжения следуют каким угодно законам и если на отрезке O_1O_2 существует положение равновесия O, то равновесие будет устойчивым, лишь бы было $\varphi_1'+\varphi_2'>0$.

21. Пусть оси $Oxyz$ вращаются вокруг Oz с постоянной угловой скоростью ω и F — сила, являющаяся производной от потенциала $U(x, y, z)$, который не зависит от времени, если относится к указанным осям.

Показать, что движение свободной точки с массой m, находящейся под действием силы F, допускает интеграл

$$\frac{mv^2}{2}-\left\{U+m\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right\}=\text{const}.$$

Распространить теорему Дирихле на устойчивость относительного равновесия в указанных условиях.

22. Из элементов дифференциальной геометрии известно, что цилиндры и конусы суть развертывающиеся поверхности, т. е. могут быть развернуты на плоскость без изменения длин и углов. Показать на основании уравнения (80) п. 40 (спроектированного на касательную плоскость), что при $F=0$ геодезические линии цилиндров и конусов развертываются в прямые.

23. Доказать, что траектория точки, движущейся по поверхности, будет геодезической линией, даже если принимается во внимание трение скольжения или вообще пассивное сопротивление, прямо противоположное направлению движения.

24. Показать, что тяжелая точка, движущаяся по совершенно гладкой цилиндрической поверхности с вертикальными образующими (и с любым нормальным сечением), описывает траекторию, превращающуюся при развертывании цилиндра на плоскость в параболу (см. п. 40, после проектирования уравнения (80) на вертикаль и на касательную нормального сечения).

25. Тяжелая точка движется по совершенно гладкой плоскости, равномерно вращающейся вокруг лежащей в ней вертикальной оси. Показать, что уравнение проекции траектории на горизонтальную плоскость есть $r=ae^{\theta}+be^{-\theta}$ (r и θ — полярные координаты на горизонтальной плоскости с полюсом на оси, a и b — постоянные).

26. Точка может двигаться по совершенно гладкой поверхности параболоида вращения с вертикальной осью и с вогнутостью, обращенной кверху. Она находится под действием собственного веса и брошена с горизонтальной скоростью v_0 из некоторой точки на параллели радиуса r_0.

Показать, что если в некоторый момент скорость точки v опять будет направлена горизонтально, то абсолютная величина этой скорости будет равна $r_0\sqrt{\frac{2g}{p}}$, где p есть параметр меридианной параболы. Как увидим, это абсолютное значение не зависит от начальной скорости v_0.

27. Пусть ось Oz будет вертикальна и направлена вверх. Начало координат есть положение равновесия для тяжелой точки P, удерживаемой на совершенно гладком параболоиде

$$z=\frac{ax^2+by^2}{2}.$$

Из двух первых уравнений (80″) п. 42 исключить множитель λ посредством третьего уравнения и z посредством уравнения параболоида. Таким образом, получатся два уравнения движения точки P в координатах x и y.

На основании интеграла живых сил и теоремы Дирихле (отнесенной к параболоиду, т. е. к двум независимым переменным x, y) показать, что равновесие будет устойчивым, если коэффициенты a и b положительны. Малые колебания определяются уравнениями

$$\ddot{x}=-ax,\quad \ddot{y}=-by.$$

Аналогичное рассуждение будет иметь силу для произвольной поверхности, для тех ее точек, где касательная плоскость будет горизонтальной, так как всякая поверхность в непосредственной близости от какой-нибудь из своих неособых точек может быть уподоблена параболоиду.

28. Пусть ρ, θ, z суть цилиндрические координаты, как в п. 46, и, кроме того, ось Oz вертикальна и направлена вверх. Если положим $u=1/\rho$ и примем уравнение меридианной кривой на поверхности вращения вокруг оси Oz в форме $z=\varphi(u)$, то дифференциальное уравнение между u и θ, определяющее траекторию тяжелой точки, движущейся по поверхности без трения (или, если угодно, проекцию траектории на горизонтальную плоскость), представится в виде

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\left\{1+u^4\varphi'^2(u)\right\}+u^2+\frac{2g}{c^2}\varphi(u)=\text{const},$$

где c есть постоянная площадей.

29. На основании уравнений (87) п. 47, определяющих движение тяжелой точки по поверхности вращения с вертикальной осью и без трения, исследовать возможность движения вдоль параллелей и показать, что речь идет о равномерном движении по параллели с угловой скоростью $\sqrt{g\operatorname{ctg}\gamma}$, где γ обозначает широту (угол нормали к поверхности вдоль параллели с горизонтальной плоскостью).

30. Исследовать малые колебания сферического маятника, принимая во внимание сопротивление воздуха. Сопротивление предполагается вязким, потому что речь идет о медленном движении (гл. I, п. 21); сообразно этому достаточно ввести в левые части уравнений (65′) п. 52 два члена вида $2h\dot{x}$, $2h\dot{y}$ (h — положительная постоянная).

Например, полагая $x = e^{-ht}\xi$, $y = -e^{-ht}\eta$, примем, что при достаточно малом h (точнее, при $h^2 < g/l$) движение маятника (отождествляемое с его горизонтальной проекцией) можно рассматривать как эллиптическое, так же как при $h = 0$, с той, однако, разницей, что эллипс стягивается по показательному закону при возрастании времени, оставаясь гомотетичным *) своему начальному положению. Действительная траектория будет иметь вид эллиптической спирали, которая обратится в логарифмическую спираль (т. I, гл. II, п. 37), если эллипс сведется к окружности.

---

*) Если из какой-нибудь точки S провести ко всем точкам фигуры лучи и затем на этих лучах отложить от точки S в ту же сторону отрезки, увеличенные или уменьшенные в одинаковое число раз, то получившаяся фигура — геометрическое место концов измененных таким образом отрезков, называется гомотетичной данной фигуре. Такая гомотетия называется прямой. Если же увеличенные или уменьшенные отрезки откладываются от S в противоположную сторону, то гомотетия называется обратной. *(Прим. перев.)*