Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Динамическое истолкование законов Кеплера

1. В п. 1 предыдущей главы мы отметили, что среди динамических задач, в которых приходится рассматривать системы свободных точек, первое место по важности занимают задачи небесной механики. В этой главе, чтобы дать первые и наиболее элементарные понятия этой ветви механики, возьмем снова кеплеровы движения, уже изучавшиеся в § 8 гл. II т. I, т. е. движения планет вокруг Солнца. Эти движения характеризуются тремя законами Кеплера, формулировку которых здесь целесообразно повторить:

1. *Орбиты планет суть эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

2. *Площади, описанные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны временам, в которые они были пройдены.*

3. *Квадраты времен, в течение которых различные планеты пробегают свои орбиты (квадраты времен обращения), пропорциональны кубам больших полуосей этих орбит.*

В т. I (гл. II, § 8, п. 54) было показано, что первые два закона Кеплера достаточны для того, чтобы характеризовать движение отдельной планеты P, поскольку они приводят к заключению, что ускорение планеты P постоянно направлено к Солнцу и имеет величину

$$\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}, \tag{1}$$

где c есть постоянная площадей (удвоенная секторная скорость планеты), p — параметр эллиптической орбиты и r — расстояние SP планеты от Солнца.

Обозначая через m массу планеты и применяя динамическое определение силы, которое дается основным уравнением динамики $F = ma$, мы можем здесь сказать, что *планета движется так, как если бы она притягивалась Солнцем с силой (центральной), направленной от планеты к Солнцу, величина которой есть*

$$\frac{c^2}{p}\frac{m}{r^2}, \tag{2}$$

т. е. обратно пропорциональна квадрату расстояния.

С другой стороны, обозначая через a и T большую полуось орбиты и время обращения планеты, мы нашли (т. I, гл. II, п. 51)

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \tag{3}$$

откуда на основании третьего закона Кеплера заключаем, что коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{c^2}{p}, \tag{4}$$

который появляется в выражении (2) для силы притяжения Солнцем отдельной планеты, будет один и тот же для всех планет.

§ 2. Прямая задача Ньютона

2. Динамическое истолкование законов Кеплера, данное выше, естественно приводит к задаче: *определить движение материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром S с силой, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния.*

Эта задача как частный случай входит в более общую задачу, рассмотренную в § 2 предыдущей главы. Поэтому мы сразу же можем сказать, что речь идет *о плоском движении*, для которого существуют одновременно *интеграл живых сил и интеграл площадей* относительно центра силы S (гл. II, п. 3).

Приведя здесь эти результаты, полученные из общей теории § 2, мы дадим далее независимую аналитическую трактовку частной задаче, сформулированной выше, как ввиду важности самой задачи, так и ввиду дальнейших исследований, которые мы намерены с ней связать; при этом мы будем возвращаться к общей теории всякий раз, когда для этого представится удобный случай.

3. Условимся принимать за единицу массы массу движущейся точки P и обозначим через k величину силы притяжения, действующей на массу, равную единице и находящуюся на расстоянии, равном единице, от центра силы. Тогда составляющая $\varphi(r)$ силы притяжения единичной массы на расстоянии r по направлению прямой SP будет иметь вид

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Если определить аддитивную постоянную так, чтобы потенциал в бесконечности равнялся нулю, то он определится равенством

$$U(r) = \frac{k}{r}. \tag{5}$$