С другой стороны, обозначая через a и T большую полуось орбиты и время обращения планеты, мы нашли (т. I, гл. II, п. 51)

$$\frac{c^2}{p}=4\pi^2\frac{a^3}{T^2}, \tag{3}$$

откуда на основании третьего закона Кеплера заключаем, что коэффициент пропорциональности

$$k=\frac{c^2}{p}, \tag{4}$$

который появляется в выражении (2) для силы притяжения Солнцем отдельной планеты, будет один и тот же для всех планет.

§ 2. Прямая задача Ньютона

2. Динамическое истолкование законов Кеплера, данное выше, естественно приводит к задаче: *определить движение материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром S с силой, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния.*

Эта задача как частный случай входит в более общую задачу, рассмотренную в § 2 предыдущей главы. Поэтому мы сразу же можем сказать, что речь идет *о плоском движении*, для которого существуют одновременно *интеграл живых сил и интеграл площадей* относительно центра силы S (гл. II, п. 3).

Приведя здесь эти результаты, полученные из общей теории § 2, мы дадим далее независимую аналитическую трактовку частной задаче, сформулированной выше, как ввиду важности самой задачи, так и ввиду дальнейших исследований, которые мы намерены с ней связать; при этом мы будем возвращаться к общей теории всякий раз, когда для этого представится удобный случай.

3. Условимся принимать за единицу массы массу движущейся точки P и обозначим через k величину силы притяжения, действующей на массу, равную единице и находящуюся на расстоянии, равном единице, от центра силы. Тогда составляющая $\varphi(r)$ силы притяжения единичной массы на расстоянии r по направлению прямой SP будет иметь вид

$$\varphi(r)=-\frac{k}{r^2}.$$

Если определить аддитивную постоянную так, чтобы потенциал в бесконечности равнялся нулю, то он определится равенством

$$U(r)=\frac{k}{r}. \tag{5}$$

Тогда оба первых интеграла: интеграл живых сил и интеграл площадей, выраженные, в полярных координатах r, θ с полюсом в центре силы, примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)&=\frac{k}{r}+E,\\ r^2\dot{\theta}&=c, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где, как обычно, E и c обозначают соответственно постоянную энергии и постоянную площадей.

Определение движения тем самым сведено к интегрированию системы первого порядка (6) (которое, как мы знаем из общей теории, выполняется в квадратурах).

С качественной точки зрения полезно отметить в соответствии с общими замечаниями п. 4 предыдущей главы, что из интеграла живых сил, т. е. из первого из уравнений (6), вытекает неравенство

$$\frac{k}{r}\geqslant -E.$$

Из этого неравенства следует, что, если полная энергия отрицательна, то во время движения радиус-вектор всегда остается меньше или, самое большее, равен $-k/E$; этим ограничивается область, внутри которой должна располагаться орбита.

4. Круговые орбиты. Исследование случая, когда орбита оказывается круговой ($r=\text{const}$), исчерпывается прямыми и элементарными рассуждениями. В этом случае из закона площадей следует постоянство скорости на орбите, так что движение будет равномерным.

Если теперь через a обозначим радиус орбиты и через n (постоянную) угловую скорость радиуса, то скорость на орбите v будет равна an, а ускорение (целиком центростремительное) будет равно

$$\frac{v^2}{a}=an^2.$$

Сравнивая это значение с абсолютной величиной силы притяжения $\varphi(r)=-\frac{k}{r^2}$, при $r=a$, получим

$$\frac{k}{a^2}=an^2. \tag{7}$$

Отсюда заключаем, что для заданной действующей силы круговое движение оказывается возможным на некотором расстоянии a от центра силы, лишь бы угловая скорость имела одно из двух значений, определяемых равенством (7).

Из последних двух равенств следует

$$v^2 = \frac{k}{a}, \tag{8}$$

откуда заключаем, что кинетическая энергия $v^2/2$ единичной массы равна половине соответствующей величины k/a потенциала; та и другая остаются постоянными в течение всего движения.

Мы придем к тем же выводам, если рассмотрим этот вопрос как задачу об относительном равновесии. Действительно, материальную точку, движущуюся по окружности радиуса a с угловой скоростью n, можно рассматривать как находящуюся в покое относительно осей, вращающихся с той же угловой скоростью. Поэтому активная сила притяжения (центростремительного радиального) k/a^2 и центробежная радиальная сила n^2a должны находиться в равновесии (т. I, гл. XVI, п. 6), т. е. мы приходим как раз к равенству (7).

Укажем, наконец, еще значения, которые в этом частном случае принимают обе постоянные — полной энергии и площадей:

$$E = \frac{v^2}{2} - U = -\frac{1}{2}\frac{k}{a},$$

$$c = a^2\dot{\theta} = a^2 n = \pm\sqrt{ka}.$$

Из первой формулы, если принять во внимание равенство (8), следует, что *в случае круговой орбиты полная энергия отрицательна* и равна живой силе, взятой с обратным знаком.

5. Вырожденные орбиты. В качестве второго частного случая рассмотрим тот, когда обращается в нуль постоянная c площадей.

Исключая возможный случай постоянного совпадения точки P с центром силы S (т. е. случай, когда r все время равно 0), найдем на основании закона площадей $\dot{\theta} = 0$, или же $\theta = \text{const}$, так что движение будет происходить по прямой, проходящей через S, и закон изменения радиуса r как функции времени на этой прямой определяется интегралом живых сил, который здесь сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{k}{r} + E. \tag{9}$$

Мы пришли к простейшему уравнению известного вида (8′) гл. I, § 6, поэтому можем применить здесь результаты, полученные там для общего случая. С этой целью мы будем различать два случая в зависимости от знака постоянной энергии E:

а) $E < 0$. Так как правая часть равенства (9) не должна быть отрицательной, то постоянно будем иметь $r \leqslant -k/E$, так что *движение будет происходить полностью на конечном расстоянии.*

Если начальная скорость $\dot{r}_0$ направлена к центру или равна нулю (последний случай может представиться только при $r_0 = -\frac{k}{E}$), то движущаяся точка, не изменяя направления на обратное, достигнет центра сил S в конечное время, а скорость по величине будет возрастать беспредельно (гл. I, п. 27).

С астрономической точки зрения такую возможность можно истолковать как катастрофическое столкновение двух небесных тел P и S, после которого нет смысла следить за явлением, отыскивая поведение r при последующем возрастании t[1]).

Если, наоборот, $\dot{r}_0 > 0$, то движущаяся точка сначала удаляется от S на расстояние $2a$, определяемое равенством

$$2a = -\frac{k}{E} \tag{10}$$

(единственный нуль функции в правой части равенства (9)), а затем возвращается обратно и движется к S, как было описано выше.

б) $E \geq 0$. В этом предположении правая часть равенства (9) при $r > 0$ уже не исчезает и остается всегда положительной, так что движение не может изменить своего направления (гл. I, п. 27).

Если начальная скорость направлена к центру ($\dot{r}_0 < 0$), то движущаяся точка за конечное время достигнет центра силы, как и в случае а).

Если же, наоборот, $\dot{r}_0 > 0$, то из равенства (9), принимая во внимание предположение $E \geq 0$, видим, что в течение всего движения будет

$$\dot{r} \geq \sqrt{\frac{2k}{r}},$$

а так как

$$\dot{r}\sqrt{r} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}(r^{3/2}),$$

то из неравенства следует

$$\frac{d}{dt}(r^{3/2}) \geq 3\sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Поэтому величина $r^{3/2}$, а вместе с ней и сам радиус-вектор r возрастает беспредельно вместе с t, а движущаяся точка будет беспредельно удаляться от центра по своей прямолинейной траектории.

6. Орбиты общего вида. Предполагая теперь $c \neq 0$, из второго из равенств (6) (интеграл площадей) получим, что θ есть монотон-

[1]) Отметим, что в некоторых исследованиях по небесной механике, чтобы углубить качественное исследование движения, оказывается полезным также рассмотрение аналитического продолжения интеграла и после столкновения. См., например, Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta math.*, т. 42, 1919.

ная и, следовательно, однозначно обратимая функция времени, так что в первом из равенств (6) (интеграл живых сил) за независимую переменную можно принять вместо t угол θ. Чтобы выполнить эту замену переменного, достаточно по обыкновению рассматривать в нем r как сложную функцию от t через посредство θ и исключить $\dot\theta$ при помощи интеграла площадей. Таким образом, мы придем к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{c^2}+\frac{2k}{c^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}, \tag{11}$$

определяющему полярное уравнение $r=r(\theta)$ орбиты общего вида рассматриваемого движения; оно представляет собой вместе с тем частный случай основного уравнения (10) предыдущей главы, так как справедливо только для определенного закона действия силы.

В общей теории мы полагали $r=\frac{1}{u}$, но в настоящем случае мы можем достигнуть еще большей формальной простоты, если вместо r примем за новую независимую переменную

$$\chi=\frac{1}{r}-\frac{k}{c^2}, \tag{12}$$

вследствие чего уравнение (11) примет вид

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}-\chi^2. \tag{11'}$$

Постоянная

$$\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}$$

в силу того же равенства (11') есть сумма квадратов и необходимо будет положительной, за исключением лишь того случая, когда χ тождественно обращается в нуль, что в силу зависимости (12) может случиться только при $r=c^2/k$, т. е. в случае круговой орбиты, разобранном в п. 4.

Следовательно, можно положить

$$\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}=q^2 \tag{13}$$

при $q>0$ и написать дифференциальное уравнение орбиты в окончательном виде

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2=q^2-\chi^2.$$

Его общий интеграл, как это можно подтвердить и непосредственно путем разделения переменных, есть

$$\chi = q\cos(\theta - \theta_0),$$

где θ_0 есть постоянная интеграции; поэтому, подставляя вместо χ его выражение (12), мы получим для орбиты уравнение в полярных координатах

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + q\cos(\theta - \theta_0)$$

или же

$$r = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + \frac{c^2 q}{k}\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Это есть полярное уравнение конического сечения, имеющего фокус в центре силы, с осью, наклоненной под углом θ_0 к полярной оси, с параметром

$$p = \frac{c^2}{k} \tag{14}$$

и с эксцентриситетом

$$e = \frac{c^2 q}{k};$$

принимая во внимание равенство (13), найдем

$$e = \sqrt{1 - \frac{2Ec^2}{k^2}}. \tag{15}$$

Припоминая выражения, найденные в п. 4 для постоянных E и c, в предположении, что орбита есть окружность (оно соответствует также предположению $c \neq 0$), и принимая во внимание, что для окружности параметр равен радиусу, а эксцентриситет равен нулю, мы видим, что формулы (14) и (15) остаются в силе также и для этого случая.

Поэтому заключаем, *что при движении точки, находящейся под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния* (за исключением случая прямолинейного движения, характеризуемого обращением в нуль постоянной площадей), *орбита всегда представляет собой коническое сечение. Между механическими постоянными интегрирования* E и c (полная энергия и удвоенная секторная скорость) *и между элементами, геометрически характеризующими орбиту,* т. е. e, p (эксцентриситет и параметр), *существуют соотношения* (14) и (15).

7. Критерий для установления вида орбиты. Из равенства (15) следует, что вид конического сечения, описываемого движущейся точкой, зависит исключительно от знака полной энергии E. Если предположим $c \neq 0$, то из уравнения (15) найдем, что эксцентриситет e

будет меньше, равен, или больше единицы, в зависимости от того, будет ли полная энергия E отрицательна, равна нулю или положительна. Таким образом, *орбита будет эллиптической, параболической или гиперболической* (подразумевается одна ветвь гиперболы) *в зависимости от того, будет ли полная энергия отрицательной, равной нулю или положительной.*

Здесь необходимо указать, что этот критерий применим даже и в том случае, когда $c=0$, если этот случай рассматривать как предельный. Действительно, при $c\to 0$ параметр орбиты стремится в силу равенства (14) к нулю, а эксцентриситет в силу равенства (15) — к 1; геометрически это означает, что орбита стремится к совпадению со своей осью.

Если $E<0$, то эллиптическая орбита вырождается в сдвоенный отрезок, концы которого с геометрической точки зрения суть в одно и то же время фокусы и вершины выродившегося эллипса, а динамически один есть центр силы, другой — афелий. Как это следует из п. 5, движущаяся точка в зависимости от направления начального движения упадет в центр силы или сразу, или, пройдя через афелий.

Если, наоборот, $E\geqslant 0$, то орбита (при $c\neq 0$ ветвь гиперболы или парабола) геометрически выродится в сдвоенную полупрямую, конец которой, будучи вершиной и фокусом орбиты, совпадает с центром силы: движущаяся точка (п. 5) уходит в бесконечность или падает в центр в зависимости от направления начальной скорости.

8. В качестве дальнейшего применения критерия, установленного в предыдущем пункте, можно указать на известное общее выражение постоянной E энергии. Из формулы (15), принимая во внимание равенство (14), получим

$$E=-\frac{k}{2p}(1-e^2).$$

С другой стороны, если на время отвлечемся от случая параболической и выродившейся орбит, то параметр, как известно, определится равенством

$$p=\pm a(1-e^2),$$

в котором верхний знак берется в случае эллиптической, а нижний — в случае гиперболической орбиты и a представляет собой большую полуось эллипса или действительную полуось гиперболы.

Комбинируя обе предыдущие формулы, мы и получим названное выше выражение для постоянной E энергии:

$$E=\mp\frac{k}{2a}. \tag{16}$$

Легко проверить, что оно остается верным также и в случаях, исключенных ранее. Действительно, для параболической орбиты имеем $E=0$, а $a=\infty$; для вырожденной эллиптической орбиты $2a$ представляет расстояние от центра силы до единственного афелия, так что формула (15) является не чем иным, как равенством (10) п. 5. Наконец, если речь идет о вырожденной гиперболической орбите, то на полупрямой, к которой сводится ветвь гиперболы, нельзя дать прямого геометрического истолкования полуоси a. Величина a является предельным значением, к которому стремится при $c \to 0$ длина действительной полуоси гиперболы при каком-либо заданном значении постоянной энергии $E > 0$; равенство (16) и определяет этот предел.

9. Кеплерово движение. Рассмотрим, в частности, эллиптическое движение в собственном смысле, которое характеризуется двумя условиями: $E < 0$, $c \neq 0$.

Легко видеть, что в этом случае движение точки, притягиваемой центром S с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, является *кеплеровым движением*, т. е. движением, удовлетворяющим первым двум законам Кеплера (см. п. 1). Действительно, движение является центральным по отношению к S, такой же, по предположению, будет и сила. Далее, орбита является эллипсом, имеющим фокус в S; и, наконец, как и во всяком движении под действием центральной силы, справедлив закон площадей по отношению к притягивающему центру.

Следовательно, речь идет о периодическом движении (как это, впрочем, a priori было ясно на основании двух соображений: орбита является замкнутой и секторная скорость постоянна). Вводя период (или продолжительность обращения) T, можно придать хорошо известную форму основному соотношению (14) между геометрическим, кинематическим и динамическим элементами p, c, k. Достаточно вспомнить (п. 1), что

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2},$$

чтобы написать равенство (14) в виде

$$k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \tag{17}$$

откуда имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{k}}. \tag{18}$$

10. Закон времени в кеплеровом движении. уравнение Кеплера. В общем случае мы заметили, что во всяком движении под действием центральной силы закон движения будет однозначно определен (интегралом площадей), если только определена орбита (гл. II, п. 6). То же самое будет иметь место и для рассматриваемых здесь движений точки, притягиваемой центром S с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, откуда, естественно, возникает задача о действительном определении для таких движений аналитического выражения закона движения. Мы займемся здесь этой задачей исключительно для случая эллиптического движения в собственном смысле (кеплерово движение), отсылая для других случаев к специальным сочинениям *).

Так как эллиптические движения, наиболее интересные для астрономии, совершаются по орбитам с малыми эксцентриситетами и потому, в предположении, что имеет место закон площадей, можно говорить о движениях почти равномерных, то естественно действительному эллиптическому движению точки P сопоставить фиктивное движение другой точки M, описывающей равномерным движением и с тем же периодом T окружность в плоскости орбиты точки P, концентрическую с орбитой и имеющую диаметром ее большую ось $2a$. Подчиним движение этой точки еще условию, что точки P и M проходят одновременно через два апсида, общие для обеих орбит. При заданном равенстве периодов (а следовательно, и полупериодов) последнее условие будет всегда выполняться, если это совпадение P и M имело место хотя бы один раз в одном из апсидов.

Постоянная угловая скорость n фиктивной точки M называется *средним движением* точки P (этот термин не вполне удовлетворителен, но он общепринят). Среднее движение, очевидно, определяется равенством

$$n = \frac{2\pi}{T};$$

поэтому равенству (18) можно придать вид

$$n^2 = \frac{k}{a^3}. \tag{18'}$$

С другой стороны, если мы введем также и малую полуось b эллиптической орбиты точки P и примем во внимание очевидное тождество (уже употреблявшееся в кинематике: т. I, гл. II, п. 51)

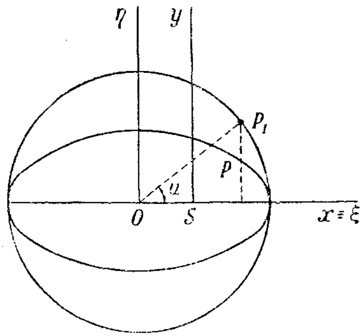
$$\pi ab = \frac{cT}{2},$$

то для среднего движения получим выражение

$$n = \frac{c}{ab}. \tag{19}$$

*) См., например, Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1933; Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935. (*Прим. ред.*)

Рассмотрим теперь в плоскости две системы прямоугольных осей (фиг. 13): 1) систему xy с началом в центре силы S, причем ось x возьмем вдоль большой оси орбиты и направим ее к перигелию, а ось y ориентируем таким образом, чтобы положительное направление от x к y совпадало с направлением движения точки P (и M); 2) систему $\xi\eta$ с началом в центре O, общем для орбит точек P и M, получающуюся из системы xy путем поступательного перенесения.



Фиг. 13.

Так как половина расстояния между фокусами OS равна ae, то имеем

$$x = \xi - ae, \quad y = \eta. \tag{20}$$

С другой стороны, известно, что если P есть любая точка эллипса и P_1 — та точка окружности, которая имеет ту же абсциссу, что и P и лежит с той же стороны относительно большой оси, то *эксцентрической аномалией* точки P называется угол u между радиусом OP_1 и полярной осью $O\xi$[1]).

Параметрические уравнения эллипса в функциях от аномалии имеют вид

$$\xi = a\cos u, \quad \eta = b\sin u. \tag{21}$$

В течение кеплерова движения точки P аномалия u будет вполне определенной функцией времени; эту функцию мы и намерены определить аналитически.

С этой целью возьмем снова интеграл площадей (относительно центра S)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c$$

и подставим в него вместо x и y их выражения (20), а в полученный таким образом результат вместо ξ и η — их выражения (21). Таким путем мы получим уравнение

$$c = \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta - ae\dot{\eta} = ab\dot{u}(1 - e\cos u),$$

которое, принимая во внимание (19), можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}(u - e\sin u) = n.$$

---

[1]) В этом пункте мы обозначаем согласно установившемуся обычаю через u эксцентрическую аномалию. В предыдущей главе, а также и в следующем п. 11 та же буква стоит вместо $^1/r$, что также сообразуется с традицией.

Интегрируя от некоторого момента t_0, когда точки P и M вместе проходят через перигелий (здесь имеем $u=0$), придем к уравнению

$$u - e\sin u = l, \tag{22}$$

где положено

$$l = n(t - t_0). \tag{23}$$

Эта переменная l, линейная относительно времени, равна, очевидно, углу, который составляет с полярной осью $O\xi$ в момент времени t радиус-вектор OM, идущий в фиктивную точку M, и называется *средней аномалией* точки P. Уравнение (22) и есть известное *уравнение Кеплера*, которое в эллиптическом движении в любой момент связывает эксцентрическую аномалию и среднюю аномалию l и которое на основании равенства (23) в неявной форме определяет u в функции от времени[1]).

11. Орбиты Эйнштейна. Прервем на время последовательный ход наших выводов, чтобы очень коротко указать на те применения, которые нашла предыдущая теория в двух основных направлениях современной физики: в теории относительности Эйнштейна и в учении Бора о *структуре атома*.

Прежде всего рассмотрим орбиты планет, которые получаются в результате применения к небесной механике теории относительности *). По этой теории (дающей лучшее приближение к действительному движению, чем теория, основанная на законах Кеплера) к основному выражению для притягивающей силы необходимо присоединить поправочный член, обратно пропорциональный четвертой степени расстояния и также имеющий характер притягивающей силы. Следует заметить, что здесь мы встречаемся с известным примером так называемой *теории планетных возмущений*, общую постановку которой мы дадим в § 5.

Если обозначим, как обычно, через

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2} = -\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}$$

радиальную составляющую силы притяжения, то в случае кеплерова движения дифференциальное уравнение второго порядка орбиты в

---

[1]) Определение u как явной функции от l, основанное на уравнении (22), составляет основную задачу сферической астрономии; таким образом Кеплер дал начало многочисленным исследованиям, направленным как к теоретическому углублению природы функции $u(l)$ из уравнения (22), так и к тому, чтобы облегчить числовые выкладки. См. Levi-Civita, Sopra la equazione di Kepler, *Rend. Lincei*, т. 13, 1904, стр. 260—268.

*) См. статью А. Эйнштейна в сборнике „Принцип относительности“ из серии „Классики естествознания“, 1935. *(Прим. ред.)*

общей форме (11') предыдущей главы (п. 7), т. е. уравнение

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right),\quad u=\frac{1}{r} \tag{24}$$

перейдет в уравнение

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{1}{p};$$

полагая

$$\xi=au=\frac{a}{r} \tag{25}$$

и припоминая, что для эллипса $p=a(1-e^2)$, можем написать

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}=-\xi+\frac{1}{1-e^2}. \tag{26}$$

Если присоединить к радиальной силе $\varphi(r)$ возмущающую силу притяжения, обратно пропорциональную четвертой степени расстояния, т. е. поправочный член вида $-\mu/r^4=-\mu u^4$, где μ обозначает положительную постоянную, то на основании уравнения (25) к правой части равенства (26) придется добавить член

$$\frac{\mu}{c^2a}\xi^2,$$

который удобнее написать в виде

$$\frac{3}{2}\varepsilon\xi^2,$$

где ε означает существенно положительную постоянную $2\mu/3c^2a$. При этом дифференциальное уравнение возмущенной орбиты примет вид

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}=-\xi+\frac{1}{1-e^2}+\frac{3}{2}\varepsilon\xi^2. \tag{26'}$$

Если мы будем рассматривать постоянную ε как величину первого порядка (квадратом которой можно пренебречь), то к уравнению (26') можем прийти, применяя к движению планет теорию Эйнштейна во втором приближении (тогда как в первом приближении, т. е. при $\varepsilon=0$, мы снова получим уравнение (26), выражающее кеплерово движение). Необходимо добавить, что согласно этой теории постоянная ε определяется равенством [1]

$$\varepsilon=\frac{2k}{aV^2}, \tag{27}$$

где k имеет обычное значение (сила притяжения, обратно пропорциональная квадрату расстояния и действующая на единичную массу,

---

[1] См. A. Palatini, Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein, *Nuovo Cimento*, сер. VI, т. XIV (1917).

находящуюся на расстоянии, равном 1), а V обозначает скорость света.

Уравнение (26′) интегрируется в эллиптических квадратурах, но, имея в виду получить здесь только одно частное следствие, имеющее большой астрономический интерес, мы ограничимся интегрированием его в первом приближении, т. е. по крайней мере до членов порядка выше первого относительно ε[1]). Поэтому предположим, что начальные постоянные выбраны таким образом, что невозмущенная орбита, определенная при тех же начальных условиях из уравнения (26), к которому при $\varepsilon=0$ сводится уравнение (26′), оказывается эллиптической (или орбитой в кеплеровом движении).

Обозначая в этом предположении через ξ_0 интеграл уравнения (26), на основании равенства (25) и полярного уравнения эллипса имеем

$$\xi_0=\frac{1+e\cos\theta}{1-e^2}. \tag{28}$$

Положив

$$\xi=\xi_0+\varepsilon\xi_1, \tag{29}$$

получим из уравнения (26′) для неизвестной функции ξ_1, с точностью до членов по крайней мере второго порядка относительно ε, линейное неоднородное уравнение (или уравнение в вариациях уравнения (26′))

$$\frac{d^2\xi_1}{d\theta^2}+\xi_1=\frac{3}{2}\xi_0^2, \tag{30}$$

общий интеграл которого, как известно, можно вычислить посредством одной квадратуры, применяя метод вариации произвольной постоянной (множителя) C, появляющейся в интеграле $C\cos\theta$ однородного уравнения.

Принимая во внимание выражение для ξ_0 (28), мы видим, что все члены функции ξ_1 являются периодическими с периодом 2π, за исключением лишь того, который происходит от члена с $\cos\theta$ в правой части уравнения (30); точнее, имеем

$$\xi_1=\xi_2+\frac{3}{2}\frac{e}{(1-e^2)^2}\theta\sin\theta,$$

где ξ_2 обозначает периодическую функцию с периодом 2π. Отсюда, а также из равенства (29) заключаем, что

$$\xi=\xi_0+\varepsilon\xi_2+\frac{3}{2}\frac{\varepsilon e}{(1-e^2)^2}\theta\sin\theta. \tag{31}$$

---

[1]) Эддингтон, Теория относительности, 1934, гл. III, п. 40.

Но из общей теории орбит точек, находящихся под действием центральных сил (гл. II, п. 8), мы знаем, что общий интеграл (31) уравнения (26′) должен быть периодическим по отношению к θ с некоторым периодом 2Θ, равным удвоенному значению соответствующего апсидального угла Θ, который здесь необходимо является близким апсидальному углу π орбиты в кеплеровом движении. Если мы положим

$$\Theta = \pi + \frac{1}{2}\sigma, \tag{32}$$

то величина σ, имеющая тот же порядок, что и ε, даст *смещение*, которое испытывает перигелий возмущенной орбиты по отношению к перигелию орбиты в кеплеровом движении при каждом обращении планеты (путь, пробегаемый между двумя последовательными прохождениями через перигелий).

Чтобы оценить теперь это смещение σ, заметим, что вследствие ожидаемой периодичности ξ должно быть

$$\xi(\theta + 2\Theta) - \xi(\theta) = 0$$

или же, принимая во внимание (31) и (32) и пренебрегая членами порядка выше первого,

$$\xi(\theta + 2\pi) - \xi(\theta) - \sigma\xi_0' = 0. \tag{33}$$

Между тем, с другой стороны, из равенств (31) и (32) выводим

$$\xi(\theta + 2\pi) - \xi(\theta) = 3\pi \frac{\varepsilon e}{(1 - e^2)^2} \sin\theta,$$

или на основании того же равенства (28)

$$\xi(\theta + 2\pi) - \xi(\theta) = -3\pi \frac{\varepsilon}{1 - e^2} \xi_0'.$$

Достаточно подставить этот результат в равенство (33), чтобы заключить, что смещение σ перигелия планеты при одном обращении с точностью по крайней мере до членов порядка выше первого относительно ε определяется равенством

$$\sigma = 3\pi \frac{\varepsilon}{1 - e^2}. \tag{34}$$

12. Чтобы дать понятие о порядке величины этого смещения, начнем с оценки постоянной (27)

$$\varepsilon = \frac{2k}{aV^2}.$$

Если обозначим через a_0 радиус (средний) земной орбиты, предполагаемой приблизительно круговой, и вспомним, что в силу равенства (8) п. 4, k/a при том же предположении равно квадрату скорости (постоянной) v_0 Земли, то равенство (27) можно написать в форме

$$\varepsilon = \frac{2a_0}{a}\left(\frac{v_0}{V}\right)^2. \tag{27'}$$

Далее, общеизвестно, что скорость v_0 движения Земли по орбите равна примерно 30 *м/сек*, а скорость света около 300 000 *км/сек*. Отсюда следует, что порядок величины отношения $\frac{v_0}{V}$ равен

$$\frac{30}{300\,000} = 10^{-4},$$

а порядок величины $\left(\frac{v_0}{V}\right)^2$ равен 10^{-8}. Так как средние расстояния различных планет от Солнца сравнимы между собой (если за единицу берется средний радиус a_0 земной орбиты, то для Меркурия имеем 0,39 и для Нептуна 30,06), то на основании соотношения (27') можно сказать, что 10^{-8} дает грубо также и порядок величины постоянной ε.

Чтобы оценить смещение σ, определяемое равенством (34), необходимо принять во внимание величину среднего расстояния до рассматриваемой планеты.

Обратимся, например, к Меркурию, для которого имеем $e = 0,2$ и, как только что указано, $\frac{a}{a_0} = 0,39$. В таком случае, принимая во внимание равенства (34), (27') и ранее определенную величину $\left(\frac{v_0}{V}\right)^2$, найдем, что смещение перигелия равно

$$3\pi \frac{2}{0,39 \cdot 0,96 \cdot 10^8} = 3\pi \frac{2}{39 \cdot 96 \cdot 10^4}.$$

Чтобы выразить это смещение в секундах (вместо радианов), только что найденное число надо умножить на $\frac{6^4 \cdot 10^3}{2\pi}$ (число секунд в одном радиане), после чего получим

$$\frac{3 \cdot 6^4}{39 \cdot 96 \cdot 10} = \frac{6^3}{13 \cdot 16 \cdot 10},$$

т. е. немного больше одной десятой секунды.

Так как в течение столетия Меркурий совершает около 420 обращений вокруг Солнца, то для перигелия этой планеты найдем таким образом вековое смещение в 42″, что как раз соответствует разности между полным наблюдаемым смещением и смещением, предсказываемым небесной механикой на основе ньютоновой теории возмущений, происходящих от действия других планет. До создания теории относительности для объяснения одного этого явления, вне всякой связи с другими явлениями, выдвигались искусственные гипотезы, которые, будучи логически развиты, в большинстве случаев, в отношении других свойств движения планет, привели бы к более существенным расхождениям с наблюдениями.

13. Понятие о строении атома согласно теории Бора. Современная электронная теория материи привела к представлению об атоме как о системе, состоящей из положительно заряженного ядра (*протона*) и вращающихся вокруг него отрицательно заряженных частиц *(электронов)*, масса которых весьма мала по сравнению с массой центрального ядра.

На основании классического закона Кулона два заряда с противоположными знаками (поскольку в вопросах динамики их можно рассматривать как точки) притягивают друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Если, в частности, мы обратимся к атому водорода, состоящему из ядра и одного только электрона с зарядом, равным и противоположным заряду ядра, то эти два заряда механически будут подобны двум материальным точкам, взаимно притягивающимся по закону Ньютона (т. I, гл. XI, § 1), с тем лишь различием, что множитель пропорциональности k не будет уже более равен fmm_1, как в ньютоновом случае. Отсюда следует, что изучение движения электрона вокруг ядра входит в задачу о движении двух точек, притягивающихся с силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния. Более того, мы докажем в п. 21, что задача о движении электрона может быть сведена к задаче о движении материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Но в то время как в абстрактном случае и в вопросах механики a priori возможны какие угодно значения для постоянных интегрирования и, в частности, для постоянной c площадей, в случае электрона приходится (по соображениям, связанным с так называемой *квантовой теорией*, которых мы не можем здесь даже слегка коснуться) принять, что постоянная c площадей может быть только кратным отношения $h/2\pi$, где h есть некоторая универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка*, т. е.

$$c = n\frac{h}{2\pi}$$

при целом и положительном n. В случае круговых орбит, у которых параметр совпадает с радиусом, из равенства (14) следует

$$c = \sqrt{k}\,\sqrt{a};$$

отсюда мы заключаем, что: 1) между возможными с точки зрения квантовой теории круговыми орбитами существует одна (та, которая соответствует случаю $n=1$) с минимальным радиусом

$$a_1=\frac{h^2}{4\pi^2 k};$$

2) остальные орбиты имеют радиусы

$$a_n=n^2 a_1 \qquad (n=2,\ 3,\ 4\ \ldots).$$

Согласно с этой теорией каждая спектральная линия обусловлена переходами электрона с одной орбиты на другую возможную орбиту. Исходя из этого предположения, Бор установил следующий результат [1]). Если обозначим через E_n полную энергию движения вдоль n-ой возможной орбиты, то, как известно (п. 4), будем иметь

$$E_n=-\frac{1}{2}\frac{k}{a_n}=-\frac{1}{2}\frac{k}{a_1}\frac{1}{n^2};$$

поэтому для другой возможной орбиты, внешней по отношению к первой ($n'>n$), будем иметь (алгебраически)

$$E_{n'}>E_n.$$

Если положим

$$E_{n'}-E_n=h\nu,$$

то величина ν даст частоту, соответствующую спектральной линии о которой идет речь.

Этот и другие выводы, полученные Бором путем присоединения подходящих квантовых гипотез к гипотезам классической физики, находятся в удивительном согласии с результатами наиболее тонких экспериментальных наблюдений.

§ 3. Закон всемирного тяготения

14. Обратимся снова к рассуждениям, изложенным в п. 1. Обозначим через P_1, P_2, ... различные планеты и условимся обозначать одним и тем же индексом i все соответствующие отдельной планете P_i элементы: геометрические, кинематические и механические (расстояние от Солнца r_i, большая полуось орбиты a_i, период T_i, масса m_i и т. д.).

Мы знаем, в качестве первого приближения, из законов Кеплера, что различные планеты движутся так, как если бы каждая из них притягивалась силой (центральной), по величине соответственно равной

$$\frac{km_1}{r_1^2},\ \frac{km_2}{r_2^2},\ \ldots,$$

[1]) См., в частности, Э. В. Шпольский, Атомная физика, т. I, 1949.