стояния между ними r (37):

$$f\frac{mm'}{r^2}.$$

Как уже упоминалось раньше (т. I, гл. XI, п. 3), *постоянную f тяготения* (или *постоянную Гаусса*), измеряющую взаимное притяжение двух единичных масс на единичном расстоянии, впервые определил лабораторным путем Кэвендиш (1797). Впоследствии было выполнено много других определений этой величины все более точными способами, и все они в согласии друг с другом приводят к одному и тому же численному значению f в единицах CGS, равному $6{,}7 \cdot 10^{-8}$ (уже упоминавшееся место из п. 3).

§ 4. Проверка закона всемирного тяготения по его следствиям

16. Индуктивный процесс открытия закона всемирного тяготения, схематически изложенный в предыдущих пунктах, опирается на совокупность данных наблюдения и, кроме того, на законы Кеплера (для планет относительно Солнца, для спутников относительно соответствующих планет). Но очевидно, что, если допустить справедливость закона Ньютона, согласно которому небесные тела взаимно притягиваются друг к другу, то, даже рассматривая эти тела как материальные точки, нельзя считать законы Кеплера вполне точными. Эти законы, выполняются только тогда, когда имеется только два взаимно притягивающихся тела и центральное тело неподвижно (относительно звезд).

Поэтому прежде чем принять гипотезу Ньютона как закон, необходимо проверить, допускает ли она в пределах соответствующего приближения справедливость законов Кеплера и других экспериментальных результатов, уже полученных ранее.

17. Справедливость в первом приближении законов Кеплера для планет. Все тела планетной системы (Солнце, планеты, спутники) не только притягиваются друг к другу попарно, но и испытывают также притяжение звезд. Однако среднее расстояние звезд от Солнца так велико по сравнению с размерами планетной системы (ближайшая звезда отстоит от Солнца круглым числом в 300 000 раз дальше Земли), что действием звезд на планетную систему можно пренебречь.

При таком приближении остается принять во внимание только взаимные притяжения тел планетной системы. Будем рассматривать определенную планету, например Землю, которую обозначим через P. Земля притягивается Солнцем и остальными телами солнечной системы; как Солнце, так и эти остальные тела находятся от Земли на расстояниях, сравнимых между собой. Но масса Солнца (что подтвердится потом и что теперь мы можем предположить лишь интуитивно на основании только грубой оценки ее действия) далеко превосходит массу каждой из планет, так что можно считать, что притяжение Земли Солнцем будет преобладающим. Пренебрегая остальными силами притяжения, нам придется рассматривать пару Солнце — Земля как изолированную во Вселенной.

Солнце и Земля, притягивая друг друга, сообщают одно другому (по отношению к звездам, к которым мы всегда должны будем относить движение) некоторое ускорение; но так как оба притяжения (Солнцем Земли и Землею Солнца) в силу третьего закона Ньютона равны по величине, то эти ускорения Солнца и Земли обратно пропорциональны их массам, так что ускорение, испытываемое Землей, превосходит во столько раз ускорение Солнца, во сколько раз масса Солнца превосходит массу Земли. Пренебрегая этим очень маленьким ускорением Солнца, происходящим от притяжения его Землей, мы можем рассматривать Солнце как неподвижное или имеющее прямолинейное равномерное движение относительно звезд. Мы приходим к схематическому рассмотрению движения Земли вокруг Солнца, как материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром S силой, по величине равной

$$f\frac{m_0 m}{r^2},$$

где m_0 и m обозначают массы Солнца и Земли, r — расстояние между ними.

Таким образом, мы пришли к задаче, полностью изученной в § 2. Результаты, полученные там, можно перенести сюда, если положить

$$fm_0 = k \tag{38}$$

и принять во внимание то несущественное обстоятельство, что здесь движущаяся точка P имеет массу m (вместо 1). Из всех орбит, рассмотренных там и вообще возможных для точки, здесь в случае пары точек Солнце — Земля (или Солнце — планета) возможна только эллиптическая орбита. Отсутствие столкновений и тот очевидный факт, что движение происходит на конечном расстоянии от Солнца, позволяют прямо заключить, что орбита Земли (как и всякой другой планеты) есть эллипс, имеющий фокус в Солнце и описываемый согласно закону площадей.

Мы видим, таким образом, что при том приближении, которому соответствует постановка задачи, закон Ньютона для движения Земли (и вообще всякой другой планеты) вокруг Солнца заключает в себе два первых закона Кеплера. Что же касается третьего, то из соотношения (17), п. 9 и из равенства (38) следует

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = fm_0 \tag{39}$$

или

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{fm_0}{4\pi^2},$$

т. е., что отношение куба большой полуоси планетной орбиты к квадрату продолжительности обращения соответствующей планеты не зависит от элементов планеты, а только от постоянной Гаусса и массы Солнца. Поэтому, какова бы ни была рассматриваемая планета, для указанного отношения всегда получится одно и то же значение. Это и выражает как раз третий закон Кеплера.

18. Справедливость в первом приближении законов Кеплера для движения спутников планет. Обратимся, например, к Солнцу S, Земле P и Луне P' и обозначим массы их соответственно через m_0, m, m'. При указанном в предыдущем пункте приближении мы можем рассматривать Солнце как неподвижное (или движущееся прямолинейно и равномерно) относительно звезд и систему Солнце—Земля—Луна как изолированную во Вселенной.

Обозначим теперь через A, A' силы притяжения, с которыми единица массы Солнца действует на единицу массы Земли P и соответственно Луны P', так что m_0A и m_0A' будут полными солнечными притяжениями, действующими на единицу массы Земли и соответственно Луны. Если аналогично обозначим через Φ притяжение единичной массой Земли единичной массы Луны, то $m\Phi$ будет полным притяжением Землей единичной массы Луны и, обратно, $-m'\Phi$ — полным притяжением Луной единичной массы Земли.

Если обозначим теперь через α, α' ускорения (абсолютные, т. е. относительно галилеевых осей) точек P и P', то соответствующие уравнения движения (оба отнесенные к единичной массе движущегося тела) примут вид

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=m_0A-m'\Phi,\\ \alpha'&=m_0A'+m\Phi.\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Если теперь отнесем движение точки P' (Луна) к движущимся осям с началом в точке P (Земля) и с неизменными направлениями, то ускорение (относительное) a точки P' относительно точки P определится по теореме Кориолиса (поскольку переносное движение здесь поступательное, т. I, гл. IV, п. 4) равенством

$$a=\alpha'-\alpha,$$

откуда на основании уравнений (40) заключаем, что

$$a=m_0(A'-A)+(m+m')\Phi.\tag{41}$$

Но среднее расстояние SP Солнце—Земля равно почти 400-кратному расстоянию PP' Земля—Луна (эти расстояния приблизительно равны 23 000 и, соответственно, 60 земным экваториальным радиусам), так что единичные солнечные притяжения A, A', действующие на единицу земной и лунной массы, приблизительно равны между собой (по величине и направлению); с другой стороны, массой Луны m' по сравнению с массой Земли m в первом приближении можно пренебречь (отношение этих двух масс равно 1 : 81).

Принимая это во внимание, в качестве уравнения относительного движения Луны по отношению к Земле вместо уравнения (41) можно взять уравнение

$$a = m\Phi. \tag{41'}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение движения точки P', притягиваемой неподвижным центром P с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Поэтому достаточно перенести сюда без существенных изменений рассуждения предыдущего пункта, чтобы заключить, что при том приближении, при котором уравнение (41') может представлять относительное движение Луны по отношению к Земле, для этого движения сохраняют свою силу законы Кеплера.

Если, в частности, введем большую полуось a' лунной орбиты и период (или продолжительность соответствующего *звездного*, т. е. отнесенного к неизменным по направлению осям, обращения) T', то для коэффициента пропорциональности земного притяжения (отнесенного к единице массы) будем иметь выражение (аналогичное выражению (39), относящемуся к солнечному притяжению)

$$fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}. \tag{42}$$

Все это с теми же самыми заключениями можно распространить и на всякую другую пару планета — спутник.

19. То, что из закона Ньютона вытекают как следствия (в первом приближении) законы Кеплера во всех случаях, в которых они были проверены наблюдениями, составляет очень внушительное доказательство законности гипотезы, выражаемой этим законом.

Другим классическим доказательством мы займемся в следующем пункте, здесь же покажем, как из рассуждений предыдущих пунктов можно получить три замечательных следствия, из которых первые два иллюстрируют большую важность закона тяготения, а третье можно истолковать как дальнейшее экспериментальное доказательство этого закона.

а) Астрономическое определение отношения между массой планеты, имеющей спутника, и массой Солнца. Обозначая через m_0, m массы Солнца S и планеты P, через a, a' — большие полуоси орбит планеты P и спутника P'

и, наконец, через T, T' — соответствующие времена обращения, возьмем снова формулы (39) и (42), дающие коэффициенты пропорциональности полного притяжения Солнцем единицы массы планеты P и полного притяжения планетой P единицы массы спутника P', т. е.

$$fm_0 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \quad fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}.$$

Отсюда, деля почленно второе равенство на первое, для отношения масс планеты и Солнца получим значение

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2},$$

вычисление которого требует только знания элементов a, a', T, T', которые легко получить из наблюдения.

Так, например, обращаясь к Солнцу—Земле—Луне, найдем, что масса Солнца в 333 000 раз больше массы Земли.

б) Средняя плотность Земли. Массу m Земли (а следовательно, и ее плотность) можно определить только приближенно, исходя из величины ускорения силы тяжести g, предполагаемой известной на основании прямых гравиметрических исследований.

Мы знаем, что вес единицы массы g в какой-нибудь точке земной поверхности есть равнодействующая земного притяжения и центробежной силы (та и другая отнесены к единице массы). Но преобладающей составляющей является первая, и если Землю приближенно рассматривать как сферу с радиусом R, с концентрическими однородными слоями, и принять величину fm в качестве коэффициента k земного притяжения, то на поверхности Земли этой составляющей придется приписать величину

$$\frac{fm}{R^2}.$$

Поэтому (предполагая приближенно, что центробежная сила, действующая на единицу массы на поверхности Земли, рассматривается как ничтожная величина) можно положить

$$g = \frac{fm}{R^2}, \tag{43}$$

откуда для массы Земли получается значение

$$m = \frac{gR^2}{f}.$$

Предполагая, что поверхность Земли сферична, и разделив массу ее на объем, получим для средней плотности Земли значение

$$\mu = \frac{3g}{4\pi R f}.$$

Но так как $g = 9{,}8$ *м/сек*$^{-2}$, а по определению метра $2\pi R = 4 \cdot 10^7$ *м*, то имеем

$$\frac{g}{4\pi R} = \frac{9{,}8}{8 \cdot 10^7};$$

отсюда, так как в единицах CGS $f = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$, заключаем, что средняя плотность Земли (в *г* $\cdot$ *см*$^{-3}$) равна

$$\frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 10}{8 \cdot 6{,}7},$$

т. е. приблизительно 5,5.

Так как средняя плотность горных пород на поверхности колеблется около 2,5, то необходимо допустить, что внутри Земли материя является более плотной, чем на поверхности.

в) Определение величины g по движению Луны. С этой целью достаточно принять во внимание формулы (42) и (43), т. е. формулы

$$fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}, \quad g = \frac{fm}{R^2}, \tag{44}$$

где, как обычно, a' и T' обозначают большую полуось лунной орбиты и соответствующий период, R — земной радиус. Исключая fm, получим для g величину

$$g = 4\pi^2 \frac{a'^3}{R^2 T'^2} = 2\pi R \left(\frac{a'}{R}\right)^3 \frac{2\pi}{T'^2}. \tag{44'}$$

Вспомним, что среднее значение отношения a'/R равно 60, а время (звездного) обращения Луны равно 27 *сут* 7 *час* 45 *мин*, или 39 345 *мин* $= 39\,345 \cdot 60$ *сек*. Принимая, кроме того, во внимание определение метра, найдем (в *м* $\cdot$ *сек*$^{-2}$)

$$g = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot 10^{10} 2\pi}{(39\,345 \cdot 60)^2},$$

т. е. приблизительно 9,74.

Это значение немного отличается от 9,80 — среднего значения g, вычисленного прямым путем на поверхности Земли. Несмотря на эту разницу, результат, полученный таким образом, можно принять за доказательство справедливости закона тяготения, поскольку ошибку, оставаясь в области той же ньютонианской теории, можно объяснить, тем, что две формулы (44) были выведены с различной степенью точности. Вторую из них мы получили, предполагая, что Земля имеет сферическую форму и состоит из однородных концентрических слоев, а также пренебрегая центробежной силой, происходящей от вращения (см. т. I, гл. XVI, п. 36). В действительности за численное значение величины fm/R^2 следовало бы принять не ускорение силы тяжести g, а земное притяжение G, которое превосходит g (на экваторе на 3,5 *см/сек*^{2}), в силу чего разница была бы уменьшена.

Важно также заметить, что при выводе первого из равенств (44) и, следовательно, равенства (44'), вытекающего из равенств (44), мы, во-первых, считали равными полные притяжения Солнцем единицы массы планеты и спутника, во-вторых, мы пренебрегали массой спутника по сравнению с массой планеты. В случае Земли—Луны нетрудно убедиться, что ошибка в большей части зависит от этого последнего предположения, на основании которого и был получен результат вышеуказанного вычисления g.

20. Кометы. Дальнейшее экспериментальное доказательство закона тяготения, которое уже во времена Ньютона казалось по справедливости решающим, было получено из наблюдений над движением комет. До Ньютона астрономы не рассматривали движения комет; Кеплер, например, принимал их за временные метеоры, порождаемые эфиром. Но Ньютон математическим путем (см. § 2) убедился в том, что точка, притягиваемая неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, может описывать не только орбиты с небольшим эксцентриситетом (каковыми в первом приближении являются орбиты планет), но также и эллипсы, как угодно вытянутые, или даже дуги парабол или гипербол. Принимая это во внимание, он пытался объяснить движение комет, которые обычно появляются на огромных расстояниях от Солнца, приближаются к нему, а затем удаляются и исчезают.

С этой целью производились прямые наблюдения кометы, которая появилась 14 ноября 1680 г.; немного спустя, 5 декабря, она скрылась в лучах Солнца. По истечении нескольких дней, именно 22 декабря, появилась комета с противоположной стороны от Солнца; она быстро двигалась, удаляясь от него, пока не исчезла.

После математической обработки результатов полученных таким образом двух рядов наблюдений, Ньютон установил, что в действительности речь шла об одной и той же комете, описавшей дугу параболы с фокусом в Солнце.

Впоследствии наблюдались многочисленные кометы; одни из них двигались по параболическим орбитам, другие — появлявшиеся периодически — по эллипсам с большим эксцентриситетом. Во всяком случае было установлено при удивительном согласии со следствиями из гипотезы Ньютона, что Солнце является фокусом кометных орбит, и при движении приблизительно выполняются закон площадей и третий закон Кеплера (независимость коэффициента солнечного притяжения от какого-либо характеристического элемента отдельных комет).

Это доказательство станет еще более убедительным, если мы обратим внимание на то, что в то время как планеты движутся все в плоскостях, мало наклоненных к плоскости эклиптики (т. е. к плоскости земной орбиты), плоскости кометных орбит относительно этой плоскости имеют значительно более разнообразные наклонения: кометы приходят, так сказать, из всякой области неба.

§ 5. Строгие следствия из закона тяготения

21. Задача двух тел. На основании закона Ньютона основной задачей небесной механики является задача о движении скольких угодно тел (рассматриваемых как материальные точки), попарно притягивающихся силами, пропорциональными произведению масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, в котором число тел сводится к двум.

В астрономии этот случай осуществляется приблизительно всякий раз, когда рассматриваются такие два небесных тела, для которых можно пренебречь действиями на них всех остальных тел: типичным примером являются так называемые *двойные звезды*.

Если пренебречь действием на систему Солнце—планета или планета—спутник других небесных тел, то к этой задаче двух тел можно будет отнести также и задачу о движении систем Солнце—планета или планета—спутник, которую мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе, приводя ее при помощи соответствующих предположений к случаю движения точки, притягиваемой неподвижным центром. Как мы увидим из последующего изложения, эта новая постановка указанных задач, являясь менее схематичной, чем постановка, изложенная в предыдущем параграфе, приводит к приближению, несколько лучшему, чем то, которое было достигнуто при изучении движения точки, притягиваемой неподвижным относительно звезд центром (или центром, находящимся в прямолинейном и равномерном движении).

Итак, пусть P_0 и P будут два тела с массами m_0 и m, которые мы будем рассматривать как изолированные во Вселенной. Аналогично тому, как это делалось в п. 18, обозначим через $\boldsymbol{A}$ притяжение единицей массы P_0 единицы массы P, через $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}$ — абсолютные ускорения точек P_0 и P и через $\boldsymbol{a}$ — ускорение (относительное) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0$ точки P относительно осей с неизменными направлениями и началом в точке P_0.

Так как по третьему закону Ньютона притяжение единицей массы тела P единицы массы тела P_0 есть $-\boldsymbol{A}$, то будем иметь

$$\boldsymbol{\alpha}_0=-m\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{\alpha}=m_0\boldsymbol{A} \tag{45}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a}=(m_0+m)\boldsymbol{A}.$$

Это уравнение *относительного движения* одного из двух тел по отношению к другому (в нашем случае тела P относительно тела P_0) тождественно, как мы видим, с движением, которое имело бы тело P, если бы тело P_0 было неподвижным (или находящимся