тельно этой плоскости имеют значительно более разнообразные наклонения: кометы приходят, так сказать, из всякой области неба.

§ 5. Строгие следствия из закона тяготения

21. Задача двух тел. На основании закона Ньютона основной задачей небесной механики является задача о движении скольких угодно тел (рассматриваемых как материальные точки), попарно притягивающихся силами, пропорциональными произведению масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, в котором число тел сводится к двум.

В астрономии этот случай осуществляется приблизительно всякий раз, когда рассматриваются такие два небесных тела, для которых можно пренебречь действиями на них всех остальных тел: типичным примером являются так называемые *двойные звезды*.

Если пренебречь действием на систему Солнце—планета или планета—спутник других небесных тел, то к этой задаче двух тел можно будет отнести также и задачу о движении систем Солнце—планета или планета—спутник, которую мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе, приводя ее при помощи соответствующих предположений к случаю движения точки, притягиваемой неподвижным центром. Как мы увидим из последующего изложения, эта новая постановка указанных задач, являясь менее схематичной, чем постановка, изложенная в предыдущем параграфе, приводит к приближению, несколько лучшему, чем то, которое было достигнуто при изучении движения точки, притягиваемой неподвижным относительно звезд центром (или центром, находящимся в прямолинейном и равномерном движении).

Итак, пусть P_0 и P будут два тела с массами m_0 и m, которые мы будем рассматривать как изолированные во Вселенной. Аналогично тому, как это делалось в п. 18, обозначим через $\boldsymbol{A}$ притяжение единицей массы P_0 единицы массы P, через $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}$ — абсолютные ускорения точек P_0 и P и через $\boldsymbol{a}$ — ускорение (относительное) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0$ точки P относительно осей с неизменными направлениями и началом в точке P_0.

Так как по третьему закону Ньютона притяжение единицей массы тела P единицы массы тела P_0 есть $-\boldsymbol{A}$, то будем иметь

$$\boldsymbol{\alpha}_0=-m\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{\alpha}=m_0\boldsymbol{A} \tag{45}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a}=(m_0+m)\boldsymbol{A}.$$

Это уравнение *относительного движения* одного из двух тел по отношению к другому (в нашем случае тела P относительно тела P_0) тождественно, как мы видим, с движением, которое имело бы тело P, если бы тело P_0 было неподвижным (или находящимся в равномерном и прямолинейном движении относительно звезд) и, притягивая тело P по закону Ньютона, имело бы вместо фактической массы m_0 массу m_0+m. Другими словами, в относительном движении все происходит так, как если бы речь шла о ньютонианском притяжении неподвижным центром с единственным отличием, что коэффициент притяжения k вместо того, чтобы быть равным fm_0 (ср. п. 17), определялся бы равенством

$$k=f(m_0+m). \tag{38'}$$

В случае, когда масса m ничтожна по сравнению с m_0 (Солнце—планета, планета—спутник), мы снова возвращаемся к рассуждениям и результатам пп. 17, 18.

Но во всяком случае, т. е. каков бы ни был порядок величины m по сравнению с m_0, речь идет о задаче, непосредственно интегрируемой (§ 2), и орбита (относительная) точки P относительно точки P_0 является коническим сечением, имеющим фокус в P_0; она может принадлежать к какому-нибудь одному из трех типов (и, в частности, может также быть вырожденной).

Поэтому в случае эллиптической орбиты для движения точки P относительно точки P_0 остаются в силе два первых закона Кеплера (см. п. 9).

Далее, если в этом случае введем большую полуось a орбиты и время обращения T, то в силу формул (17), п. 9 и (38') будет существовать соотношение

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2}=f(m_0+m). \tag{39'}$$

Для другого тела P' с массой m', описывающего, как и P, орбиту (относительную) под действием исключительно тела P_0, при обычном значении символов, будем иметь

$$4\pi^2\frac{a'^3}{T'^2}=f(m_0+m'). \tag{39''}$$

Правые части равенств (39'), (39''), вообще говоря, будут неравны; если же они совпадают или по крайней мере приблизительно равны, как это будет в том случае, когда m и m' обе ничтожны по сравнению с m_0, то, приравнивая левые части равенств (39'), (39''), мы увидим (по крайней мере приблизительно), что для движения двух тел P и P' относительно P_0 будет справедлив и третий закон Кеплера.

В заключение добавим, что когда при ньютоновой трактовке движения небесных тел мы приводим изучаемую задачу к задаче о двух телах, то, вообще говоря, остаются в силе только два первых закона Кеплера. Третий будет справедлив (точно или приближенно) только в том случае, если будут выполняться указанные выше условия.

22. Задача $(n+1)$ тел. Перейдем теперь к случаю любого числа тел. Имея в виду выяснить не абсолютное движение этих тел, а относительное по отношению к одному из них, которое будем называть *центральным* (таким в случае солнечной системы будет Солнце), обозначим это последнее через P_0, а остальные через $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Через $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ обозначим соответствующие массы, и для любой пары тел P_i, P_j через $\boldsymbol{A}_{ij}$ обозначим ньютонианское притяжение, с которым единица массы тела P_j действует на единицу массы тела P_i, в силу чего направление вектора $\boldsymbol{A}_{ij}$ будет направлением от P_i к P_j; с другой стороны, по третьему закону Ньютона имеем

$$\boldsymbol{A}^j{}_i = -\boldsymbol{A}_{ij}.$$

Если временно введем абсолютное ускорение $\boldsymbol{\alpha}_i$ отдельных тел P_i, то путем обычного обобщения уравнений (45) предыдущего пункта будем иметь

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=0}^{n}{}^{i}\, m_j \boldsymbol{A}_{ij} \qquad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots, n), \tag{46}$$

где через $\sum\limits_{j=0}^{n}{}^{i}$ обозначено суммирование, распространенное на все значения $0,\ 1,\ 2, \ldots, n$ индекса j, за *исключением значения* i.

Перепишем уравнение (46), изолируя уравнение, относящееся к центральному телу, и выделяя в остальных в отдельное слагаемое притяжение, происходящее от этого тела. Таким образом, получим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= \sum_{i=1}^{n}{}^{i}\, m_j \boldsymbol{A}_{0j} \\ \boldsymbol{\alpha}_i &= m_0 \boldsymbol{A}_{i0} + \sum_{j=1}^{n}{}^{i}\, m_j \boldsymbol{A}_{ij} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{46'}$$

Отсюда аналогично тому, как это делалось в случае задачи двух тел, получим относительные ускорения $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_0$ отдельных тел $P_i\,(i=1,\ 2, \ldots, n)$ по отношению к центральному телу P_0. С этой целью заметим, что, фиксируя какой-нибудь индекс i, можно написать первое из уравнений (46') в виде

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = m_i \boldsymbol{A}_{0i} + \sum_{j=1}^{n}{}^{i}\, m_j \boldsymbol{A}_{0j}.$$

Вычитая его почленно из уравнения с индексом i системы (46') и вспоминая, что $\boldsymbol{A}_{0i} = -\boldsymbol{A}_{i0}$, мы получим уравнения движения n тел $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (отнесенные к единицам массы движущихся тел) относительно центрального тела

$$a_i = (m_0 + m_i)\boldsymbol{A}_{i0} + \sum_{j=1}^{n}{}^{i} m_j(\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Отсюда следует, что относительное движение любого тела P_i по отношению к центральному телу происходит так, как если бы речь шла об абсолютном движении под действием равнодействующей, стоящей в правой части. Она складывается из двух составляющих: 1) из ньютонианской центральной силы $(m_0 + m_i)\boldsymbol{A}_{i0}$, которая является той же самой, какая действовала бы на тело P_i, если бы оно подвергалось исключительно ньютонианскому притяжению центрального тела P_0 (задача двух тел, предыдущий пункт); 2) и из другой силы, называемой *возмущающей* силой, которая в свою очередь является суммой $n - 1$ составляющих, каждая из которых происходит от одного из $n - 1$ тел системы (исключаются центральное тело и рассматриваемое тело P_i).

Сила или отдельное *возмущение*, действующее на тело P_i со стороны другого тела P_j, т. е.

$$m_j(\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j}), \tag{48}$$

есть, очевидно, *разность притяжений, с которыми возмущающее тело P_j действует на единицу массы возмущающего тела P_i и на единицу массы центрального тела P_0.*

23. Элементарные замечания о возмущениях[1]). Из векторного выражения (48) возмущающей силы, с которой всякое тело P_j действует на единицу массы другого тела P_i системы, непосредственно вытекают некоторые заслуживающие внимания следствия.

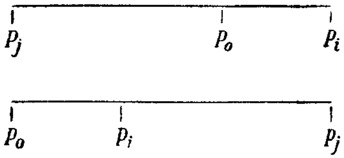
а) Предположим, что возмущающее тело P_j (фиг. 14) в заданный момент находится на одной прямой с возмущаемым телом P_i и центральным телом P_0 вне отрезка P_0P_i, независимо от того, находится ли P_j в *соединении* с центральным телом (т. е. с той же стороны от P_i, что и центральное тело) или в оппозиции (т. е. с противоположной стороны относительно P_i).

Так как оба единичных притяжения $\boldsymbol{A}_{ij}$, $\boldsymbol{A}_{0j}$ точки P_j отнесены к единице массы (тел P_i и P_0 соответственно), то их величины обратно пропорциональны квадратам расстояний P_jP_i, P_jP_0, т. е.

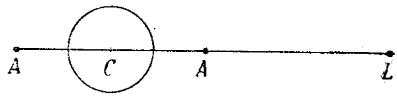
$$A_{ij} : A_{0j} = P_jP_0^2 : P_jP_i^2.$$

[1]) Ср. G. B. Airy, Gravitation, 1893.

Так как, далее, силы $\boldsymbol{A}_{ij}$, $\boldsymbol{A}_{0j}$ действуют по одной и той же прямой, то направление вектора $\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j}$ в первом случае $(P_jP_0 < P_jP_i)$ совпадает с направлением вектора $-\boldsymbol{A}_{0j}$, т. е. с направлением от P_j к P_0 или же от P_0 к P_i; во втором случае $(P_jP_0 > P_jP_i)$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{A}_{ij}$, т. е. с направлением от P_i к P_j



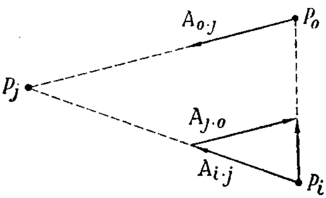
Фиг. 14.



Фиг. 15.

или же с направлением от P_0 к P_i. *В результате возмущающая сила в обоих этих случаях действует в направлении, противоположном направлению притяжения центральным телом возмущаемого тела.*

Будем рассматривать, например, Землю как центральное тело, Луну как возмущающее тело и каплю морской воды как возмущаемое тело, расположенное на прямой, соединяющей центры Земли C и Луны L (фиг. 15). Находится ли капля в A (в соединении с Луной) или в A' (в оппозиции с ней), лунное притяжение действует на каплю в направлении, обратном земному притяжению, т. е. по вертикали места снизу вверх. В этом и заключается объяснение *морских приливов и отливов* в его наиболее элементарной форме.



Фиг. 16.

б) Предположим, что возмущающее тело P_j находится (точно или приближенно) на одном и том же расстоянии от возмущаемого тела P_i и от центрального P_0 (фиг. 16). В таком случае единичные силы притяжения имеют равную величину, поэтому единичная возмущающая сила $\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j} = \boldsymbol{A}_{ij} + \boldsymbol{A}_{j0}$ будет направлена по прямой P_iP_0 от P_i к P_0; т. е. *возмущающая сила усиливает притяжение центральным телом.*

24. Задача двух тел, как мы видели, непосредственно интегрируема, но уже случай $n+1=3$ представляет аналитические трудности значительно более высокого порядка. Этот случай (*задача трех тел*), начиная с XVII в. до наших дней, является предметом многочисленных исследований, осветивших его с различных точек зрения[1]). В известном смысле можно даже сказать, что теперь

[1]) Ср. Marcolongo, Il problema dei tre corpi, Milano, Hoepli, 1919.

мы имеем ее аналитическое решение, принадлежащее Зундману (1912)[1]). Но в отношении этой классической задачи еще не сказано последнего слова[2]).

25. Понятие об эллиптических элементах. В § 2 для изучения общего решения уравнений движения точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона, мы пользовались частной системой координат, подсказанной, так сказать, природой самой задачи (плоскость xy совпадала с плоскостью движения, полюс находился в центре силы и в эллиптическом случае полярная ось была направлена вдоль большой оси орбиты в сторону перигелия). Но иногда удобнее пользоваться общей системой координат; это становится прямо необходимым, когда имеется в виду совместное изучение нескольких решений задачи, например изучение (эллиптических) движений двух или нескольких планет вокруг Солнца.

Чтобы получить формулы, представляющие общее решение относительно каких угодно осей, очевидно, достаточно выполнить в уравнениях, полученных в п. 6 и относящихся к специальной системе осей, произвольную замену координат. Но так как на основании прямого исследования мы уже знаем геометрическую природу траектории и закон движения по ней, то будет более наглядно и более полезно для целей дальнейшего изложения заранее выбрать систему параметров (геометрических и кинематических), которые были бы удобны прежде всего для определения формы и размеров орбиты, затем положения, занимаемого ею в пространстве, отнесенном к любым осям, и, наконец, закона движения по орбите.

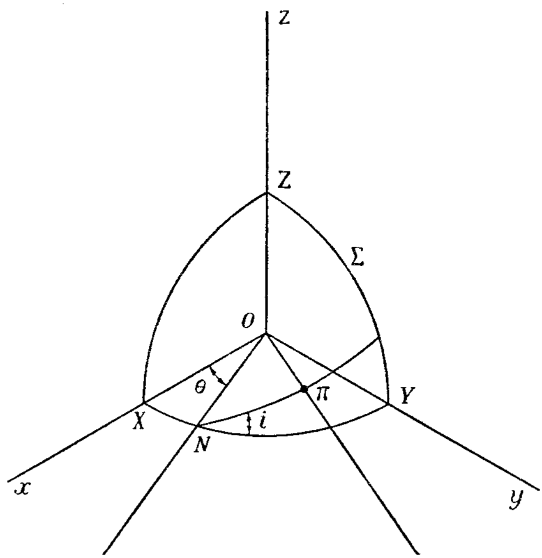
В эллиптическом случае, которым мы здесь ограничимся, форма и размеры орбиты некоторой точки P определяются постоянными a и e (большая полуось и эксцентриситет). Что же касается положения, занимаемого орбитой в пространстве, то небходимо прежде всего отметить, что начало осей выбирается во всех случаях, как это подсказывается самой задачей, в центре силы (в центре Солнца, если речь идет о движении планет), где орбита будет иметь свой фокус. Плоскость xy можно задать произвольно, но в случае планет теперь уже стало общепринятым принимать ее совпадающей с плоскостью эклиптики на 1 января 1850. Оси x, y принимают направленными к точке весеннего равноденствия и к точке летнего солнцестояния в это время, а ось z — направленной к северному полюсу эклиптики; в силу этого система осей будет правой. По отношению к этой системе осей (или какой-нибудь другой, заданной как угодно) остается еще определить положение плоскости

---

[1]) Sundmann, Mémoire sur la problème des trois corps, *Acta Mathematica*, т. 36, 1912, стр. 105—179.

[2]) Ср. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Mathematica*, т. 42, 1918, стр. 99—144.

орбиты (проходящей через начало) и на этой плоскости направление фокальной оси (которую мы будем предполагать ориентированной в сторону перигелия). Для первой цели, очевидно, необходимы два параметра и для второй — один параметр. Для выяснения смысла задаваемых параметров рассмотрим сферу Σ (фиг. 17) с центром в начале координат O и с радиусом, равным единице, на которой координатные плоскости определяют сферический треугольник



Фиг. 17.

с тремя прямыми углами XYZ. Плоскость орбиты точки P пересекает экваториальную плоскость сферы (т. е. плоскость $z=0$) по прямой, которая называется *линией узлов*, так как две ее точки пересечения с экватором сферы называются узлами.

Та точка экватора, через которую будет проходить полупрямая OP, когда небесное тело P переходит из южного полушария в северное, называется восходящим узлом.

Плоскость орбиты, очевидно, будет определена, когда будут указаны *долгота восходящего узла* N, т. е. аномалия $\theta = \widehat{XN}$ узла N относительно оси x (отсчитываемая в правом направлении относительно оси z) и *наклонение орбиты*, т. е. угол i, который большой круг сечения сферы Σ плоскостью орбиты (рассматриваемой в направлении движения) образует с экватором (рассматриваемым в правом направлении относительно оси z): θ изменяется от 0 до 2π, i от 0 до π. Этот последний угол для планет всегда мал и значительно меньше $\pi/2$; он превосходит этот предел только для некоторых комет (называемых *попятными*).

Для определения фокальной оси, направленной к перигелию, рассмотрим точку П, в которой она пересекает сферу Σ со стороны перигелия; примем за параметр сумму (двух некомпланарных углов)

$$\bar{\omega} = \theta + \widehat{NO\pi} = \widehat{XN} + \widehat{N\pi}$$

и назовем этот угол *долготой перигелия.*

Теперь нам остается только определить соответствие между последовательностью моментов времени и положениями, занимаемыми точкой P на своей орбите. С этой целью фиксируем время t_0 *прохождения через перигелий.* Но заметим при этом, что часто бывает удобнее вместо t_0 подставлять некоторый параметр уже не постоянный, а переменный, линейно связанный с временем, так называемую *среднюю аномалию* (п. 10)

$$l = n(t - t_0).$$

Эти шесть параметров: a, e, i, θ, $\bar{\omega}$, l (или t_0), первые пять из которых геометрические (и постоянные), последний же кинематический (постоянный или переменный, смотря по тому, идет ли речь о t_0 или об l), называются *элементами эллиптического движения,* или, более просто, эллиптическими элементами.

26. Так как первые пять эллиптических элементов однозначно определяют орбиту по форме, размерам и положению, а параметр l (или t_0) определяет изменение с течением времени положения на орбите, то очевидно a priori, что координаты x, y, z движущейся точки будут выражаться в функции от этих шести элементов. Мы не будем здесь останавливаться на изложении явного определения этих выражений, а только покажем, что, для того чтобы их найти, достаточно присоединить к чисто геометрическому рассмотрению уравнение Кеплера (п. 10).

Действительно, так как a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ определяют эллипс (с фокусом в начале координат, центре силы), описываемый при движении точкой P, то мы можем выразить прежде всего координаты x, y, z точки P в функции от постоянных a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ и от любого параметра, при помощи которого можно определить положение точки P на ее орбите, например от эксцентрической аномалии u; в результате мы придем к уравнениям вида

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}), \\ y &= y(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}), \\ z &= z(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}). \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Если теперь примем во внимание, что P описывает свою орбиту по закону ньютонианского притяжения (который приводит к закону площадей), то, так как речь идет об эллиптической орбите, аномалию u нужно считать связанной с временем или, лучше, со средней аномалией $l=n(t-t_0)$ уравнением Кеплера (22), (ср. п. 10)

$$u-e\sin u=l.$$

Поэтому после вычислений окончательные выражения интегралов эллиптического движения будут определяться уравнениями (49), в которых вместо аномалии u подставлено ее выражение через l и e, неявно определяемое из уравнения (22).

Составляющие $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ скорости получатся дифференцированием по времени уравнений (49), если принять во внимание, что только u зависит от этой переменной и что зависимость эта определяется уравнением (22). Так как при помощи простого дифференцирования из этого уравнения получится

$$\frac{du}{dt}=\frac{n}{1-e\cos u},$$

то таким образом в конце концов придем в общем случае к шести интегральным формулам типа

$$x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}=\text{функциям от } l,\ a,\ e,\ i,\ \theta,\ \bar{\omega}. \tag{50}$$

Можно доказать, что шесть функций, стоящих в правой части, являются независимыми по отношению к их шести аргументам, так что уравнения (50) разрешимы относительно этих функций. Другими словами, формулы (50) можно рассматривать как формулы преобразования между шестью декартовыми элементами x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и шестью эллиптическими элементами l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$.

27. Возмущенное движение. Метод вариации произвольных постоянных. Предположим теперь, что на тело P действует сила ньютонианского притяжения от неподвижного центрального тела; пусть, кроме этой силы, имеющей преобладающее влияние на движение тела P, на него действует также возмущающая сила. Если через $\boldsymbol{A}$ и Φ обозначим это притяжение и эту возмущающую силу, отнесенные к единичной массе тела P, и через $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки P, то движение (возмущенное) этой точки определится уравнением

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}+\Phi. \tag{51}$$

Это единственное векторное дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентно, очевидно, системе двух векторных уравнений первого порядка:

$$\frac{dP}{dt}=\boldsymbol{v},\quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{A}+\Phi. \tag{51'}$$

Следовательно, три уравнения второго порядка, которые получатся после проектирования уравнения (51) на оси координат (произвольно заданные с началом в точке O), будут эквивалентны шести уравнениям первого порядка, получающимся из уравнений (51') аналогичным образом.

При изучении возмущенного движения выгодно рассмотреть как раз эти шесть последних дифференциальных уравнений первого порядка и подставить в них вместо неизвестных x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ при помощи уравнений (50) новые неизвестные l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$. В этом и состоит *метод вариации произвольных постоянных*. Причина названия сделается очевидной, если представим себе, что при невозмущенном движении, т. е. при отсутствии возмущающей силы Φ, параметры l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ были бы все постоянными, за исключением лишь первого, который был бы линейной функцией времени. Таким образом, мы приходим к следующему истолкованию этих новых неизвестных по отношению к действительному возмущенному движению: они в любой момент дают элементы того гипотетического эллиптического движения точки P, которое получилось бы, если бы в рассматриваемый момент прекратилось всякое возмущающее влияние, и точка P, начиная с того состояния движения, которое она имела в этот момент в действительном движении, двигалась бы исключительно под действием ньютонианского притяжения точки A центром O.

Поэтому орбита этого фиктивного эллиптического движения (соприкасающаяся, очевидно, с действительной орбитой) называется *оскулирующей орбитой* и значения, принимаемые параметрами l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ в любой момент, называются *оскулирующими элементами* (возмущенного движения в рассматриваемый момент).

Шесть уравнений первого порядка, которые получаются после преобразования уравнений (51') посредством уравнений (50), можно представить себе разрешенными относительно производных (по времени) от оскулирующих элементов; после этого правые части (выражения скоростей изменения тех же элементов) составят так называемые *специальные возмущения*.

Главное преимущество указанного только что способа (замена уравнения (51) уравнениями (51'), введение новых неизвестных l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ и решение уравнений относительно производных от них) состоит в том, что во многих весьма важных для астрономии случаях возмущающие влияния незначительны, так что производные от оскулирующих элементов, только что названные специальными возмущениями, будут близки к значениям (одно постоянно и равно n, а остальные равны нулю), которые имели бы производные по времени от l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ в невозмущенном движении; а при наличии таких обстоятельств указанные выше дифференциальные уравнения оказываются удобными для численного интегрирования путем последовательных приближений [1]).

---

[1]) H. Andoyer, Mécanique céleste, Paris, 1923; C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels (2 тома), Leipzig, 1902—1907; Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935. H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste (3 тома), Paris, 1905—1910.

28. Замечания. Мы уже говорили в п. 26, что не имеем в виду выводить формулы (50) преобразования переменных x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ к эллиптическим элементам. Однако для иллюстрации предыдущего стоит показать две простые комбинации уравнений (50), приводящие к непосредственным и наглядным выводам для некоторых типов возмущений.

С этой целью, с одной стороны, вспомним, что в эллиптическом невозмущенном движении энергию E и постоянную площадей c можно выразить через эллиптические элементы благодаря формулам (16), (14) в виде

$$E = -\frac{k}{2a}, \quad c = \sqrt{k}\ \sqrt{p}, \tag{52}$$

где p, как обычно, обозначает параметр орбиты.

С другой стороны, обозначая через T живую силу движущегося тела P и через $U = \frac{k}{r}$ — потенциал притяжения A центральным телом, будем иметь

$$T - U = E. \tag{53}$$

Если оси координат выбраны таким образом, что плоскость xy совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты, то, кроме того, будем иметь еще

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c. \tag{54}$$

Формулы (53) и (54), если в них E и c выражены через эллиптические элементы согласно уравнениям (50), и являются теми двумя комбинациями уравнений (50), на которые мы ссылались вначале.

Для их истолкования рассмотрим движение, возмущаемое добавочной силой Φ. По теореме живых сил имеем

$$dT = dL = dU + \Phi \cdot dP;$$

на основании уравнения (53) вместо $dT - dU$ можно подставить дифференциал от E, который по существу может быть назван дальнейшим эллиптическим элементом, поскольку согласно первому из уравнений (52) он зависит исключительно от элемента a. После подстановки найдем

$$dE = \frac{k}{2a^2}\, da = \Phi \cdot dP. \tag{55}$$

Если затем, все еще имея в виду невозмущенное движение, возьмем производную по времени от уравнения (54), то будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = x\ddot{y} - y\ddot{x},$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ можно заменить соответствующими проекциями результирующей силы $A + \Phi$. В правой части появится (скалярный) момент результирующей силы относительно оси z (перпендикулярной в точке O к плоскости оскулирующей орбиты).

Так как к этому моменту сила A, как центральная по отношению к O, ничего не добавит, то остается только момент M_z возмущающей силы Φ; и наряду с равенством (55) будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = M_z. \tag{56}$$

Равенство (55) показывает, что размеры орбиты стремятся увеличиться или уменьшиться, смотря по тому, будет ли элементарная работа положительной или отрицательной. В частности, если бы возмущающая сила представляла собой пассивное сопротивление, возникающее, например, благодаря возможному наличию сопротивляющейся среды, наполняющей межпланетное пространство, то работа была бы всегда отрицательной, и размеры орбиты непрерывно уменьшались бы. Отсюда следует, что всякое пассивное сопротивление стремится вызвать падение движущегося тела на центральное.

Равенство (56) показывает, что направление изменения величины c и, следовательно, параметра P характеризуется знаком момента M_z возмущающей силы [1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть в кеплеровом движении $[r]$ и $[r^2]$ будут средними значениями за период времени T расстояния $r = SP$ и его квадрата.

Найти значения двух интегралов

$$\frac{1}{T}\int_0^T r\,dt, \quad \frac{1}{T}\int_0^T r^2\,dt.$$

Вычисление становится особенно простым, если за переменную интеграции вместо времени взять среднюю аномалию u, для которой в силу уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e\cos u)\,du = n\,dt,$$

а в силу формул (20), (21)

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Принимая во внимание (п. 10), что $T = 2\pi/n$, найдем

$$[r] = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right), \quad [r^2] = a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right).$$

2. Допуская, что излучение Солнца при любом положении планеты P обратно пропорционально квадрату расстояния $r = SP$, доказать, что в

[1]) Полную иллюстрацию этой формулы и других, аналогично связывающих производные от эллиптических элементов с возмущающей силой, см., кроме уже упоминавшихся сочинений по небесной механике и томика Эри (Airy), заметку E. Almansi, Sopra i moti ellitici perturbati, *Rend. Lincei*, т. 31, 1922, стр. 277—282. См. также Lazzarino, Sopra alcune formole della teoria dei moti ellitici perturbati, *Atti Acc. Gioenia di Catania*, т. 13, 1923.