результирующей силы относительно оси z (перпендикулярной в точке O к плоскости оскулирующей орбиты).

Так как к этому моменту сила A, как центральная по отношению к O, ничего не добавит, то остается только момент M_z возмущающей силы Φ; и наряду с равенством (55) будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = M_z. \tag{56}$$

Равенство (55) показывает, что размеры орбиты стремятся увеличиться или уменьшиться, смотря по тому, будет ли элементарная работа положительной или отрицательной. В частности, если бы возмущающая сила представляла собой пассивное сопротивление, возникающее, например, благодаря возможному наличию сопротивляющейся среды, наполняющей межпланетное пространство, то работа была бы всегда отрицательной, и размеры орбиты непрерывно уменьшались бы. Отсюда следует, что всякое пассивное сопротивление стремится вызвать падение движущегося тела на центральное.

Равенство (56) показывает, что направление изменения величины c и, следовательно, параметра P характеризуется знаком момента M_z возмущающей силы [1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть в кеплеровом движении $[r]$ и $[r^2]$ будут средними значениями за период времени T расстояния $r = SP$ и его квадрата.

Найти значения двух интегралов

$$\frac{1}{T}\int_0^T r\,dt, \quad \frac{1}{T}\int_0^T r^2\,dt.$$

Вычисление становится особенно простым, если за переменную интеграции вместо времени взять среднюю аномалию u, для которой в силу уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e\cos u)\,du = n\,dt,$$

а в силу формул (20), (21)

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Принимая во внимание (п. 10), что $T = 2\pi/n$, найдем

$$[r] = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right), \quad [r^2] = a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right).$$

2. Допуская, что излучение Солнца при любом положении планеты P обратно пропорционально квадрату расстояния $r = SP$, доказать, что в

---

[1]) Полную иллюстрацию этой формулы и других, аналогично связывающих производные от эллиптических элементов с возмущающей силой, см., кроме уже упоминавшихся сочинений по небесной механике и томика Эри (Airy), заметку E. Almansi, Sopra i moti ellitici perturbati, *Rend. Lincei*, т. 31, 1922, стр. 277—282. См. также Lazzarino, Sopra alcune formole della teoria dei moti ellitici perturbati, *Atti Acc. Gioenia di Catania*, т. 13, 1923.

кеплеровом движении планеты средняя величина солнечного излучения, падающего на планету в течение одного периода, обратно пропорциональна площади орбиты.

Достаточно вычислить среднее значение величины $1/r^2$.

3. В кеплеровом движении при $r^2\dot\theta = c$ и $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ явное выражение истинной аномалии θ в функции времени определяется дифференциальным уравнением

$$(1+e\cos\theta)^{-2}\dot\theta = \frac{c}{p^2}.$$

Поскольку

$$p^2 = a^2(1-e^2)^2 = ab(1-e^2)^{3/2},$$

оно в силу формулы (19), п. 10, может быть написано в виде

$$n\,dt = (1-e^2)^{3/2}(1+e\cos\theta)^{-2}\,d\theta.$$

Разлагая правую часть в ряд по степеням e и интегрируя, на основании определения (23) средней аномалии l найдем

$$l = \theta - 2e\sin\theta + \frac{3}{4}e^2\sin 2\theta + \ldots,$$

где опущенные члены будут по крайней мере третьего порядка относительно e. Отсюда, с точностью до членов первого порядка относительно e, найдем, что $\theta = l$, а с точностью до членов второго порядка относительно e^2, —

$$\theta = l + 2e\sin l.$$

Эти последовательные приближения можно продолжить и до членов третьего порядка; тогда найдем

$$\theta = l + 2e\sin l + \frac{5}{4}e^2\sin 2l \text{ и т. д.}$$

Разность $\theta - l$ называется в астрономии *уравнением центра.*

Принимая во внимание дифференциальное уравнение, связывающее θ и l,

$$\frac{d\theta}{dl} = (1-e^2)^{-3/2}(1+e\cos\theta)^2,$$

определить *максимальную абсолютную величину $\mathscr{E}$ уравнения центра.*

Ее надо искать между значениями θ, для которых $\frac{d\theta}{dl} = 1$, или же

$$(1+e\cos\theta)^2 = (1-e^2)^{3/2};$$

она соответствует тем возможным положениям на орбите, в которых

$$\cos\theta = -\frac{1-(1-e^2)^{3/4}}{e} \qquad (1)$$

и, следовательно,

$$r = a(1-e^2)^{1/4}.$$

Показать, что при $e<1$ дробь $\frac{[1-(1-e^2)^{3/4}]}{e}$ будет всегда положительна и меньше единицы, так что действительно существуют два угла θ_1 и $2\pi-\theta_1$ (при $\theta_1<\pi$), удовлетворяющие соотношению (1). В этих двух положениях уравнение центра имеет максимум и минимум, равные по абсолютной величине. Это и будет как раз искомой величиной $\mathscr{E}$. Показать, что по крайней мере до членов порядка выше третьего будем иметь

$$\mathscr{E}=2e+\frac{11}{48}e^3.$$

4. Пусть орбита точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона, будет параболической. Определить закон движения, принимая во внимание, что орбита описывается согласно закону площадей с полюсом в фокусе.

Сопоставляя формулы

$$r=\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{q}{\cos^2\frac{\theta}{2}}, \quad r^2\dot\theta=c,$$

придем к алгебраическому соотношению между t и $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}=\frac{c(t-t_0)}{\sqrt{2}\,q^{3/2}},$$

где t_0 обозначает момент прохождения движущейся точки через перигелий.

5. В случае гиперболической орбиты (ср. с предыдущим упражнением) в ньютонианском движении закон движения можно представить в виде

$$n(t-t_0)=e\operatorname{sh}v-v,$$

где согласно обозначениям п. 8 $n=\frac{k}{a^{3/2}}$ и v связано с r уравнением

$$r=e\operatorname{ch}v-a.$$

6. Задачи Бертрана, Альфана и Дарбу. Речь идет об определении таких позиционных сил с линией действия, проходящей постоянно через неподвижную точку, которые заставляют движущуюся точку описывать коническое сечение при любых начальных условиях. Бертран[1]) предложил эту задачу в 1873 г., после того как решил другие, связанные с ней задачи. В указанной форме эта задача была решена в том же году (Comptes Rendus, т. 84)

[1]) Жозеф Бертран (Joseph Bertrand) родился в Париже в 1832 г. умер там же в 1900 г. Был профессором в Политехнической школе и в Collège de France больше 50 лет, а с 1874 г. до конца жизни — непременным секретарем Академии наук в Париже. Тонкий и блестящий математик, он был весьма известен, кроме того, как выдающийся механик. Помимо большого курса анализа и широко распространенных учебников по элементарной математике, опубликовал некоторые из своих курсов, читанных в Collège de France (по термодинамике, по теории вероятностей, по математической теории электричества). Во всех его произведениях, вместе с оригинальностью мысли, блещет его исключительное педагогическое дарование.

Дарбу[1]) и Альфаном[2]), которые указали два a priori возможных закона для силы.

Если добавим еще условие, что рассматриваемые траектории не только конические, но и имеют один и тот же фокус, то мы опять придем к закону Ньютона (Бертран, там же). Ср., например, П. Аппелль, Руководство теоретической механики, т. I, гл. XI, пп. 232—233.

7. Показать, что средние орбитальные скорости планет (na согласно п. 10) при движении по орбите обратно пропорциональны корням квадратным из полуосей соответствующих орбит.

8. Планета (сферическая однородная) имеет спутника, среднее расстояние которого (под средним расстоянием будем понимать большую полуось орбиты) равно λR, где R есть радиус планеты. Доказать, что продолжительность одного обращения спутника есть

$$T = \sqrt{3\pi}\,\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{f\mu}},$$

где μ обозначает плотность планеты.

9. У Юпитера известны девять спутников, четыре из которых, так называемые медицейские планеты, открыты Галилеем в 1610 г. Один из них, называемый Ио, совершает свое обращение вокруг Юпитера приблизительно в 1,77 суток, полуось же его орбиты приблизительно равна 5,91 радиуса Юпитера (радиус Юпитера равен 11,14 радиуса Земли). Полуось орбиты Юпитера равна 5,20 среднего расстояния Солнце—Земля, т. е. $5{,}20 \cdot 23\,000$ земных радиусов; он обращается вокруг Солнца в течение 11 лет 314,84 суток.

Из этих данных вывести, что масса Юпитера приблизительно в 318 раз больше массы Земли, а средняя плотность равна $^1/_4$ плотности Земли.

10. Найти величину силы тяжести на поверхности Солнца и Луны, зная что радиусы их соответственно равны 109 и 0,27 радиуса Земли, а массы соответственно равны 333 000 и $^1/_{81}$ массы Земли.

---

[1]) Гастон Дарбу (Gaston Darboux) родился в Ниме в 1842 г., умер в Париже в 1917 г. Преподавал около 40 лет в Сорбонне и после смерти Бертрана был непременным секретарем Академии наук в Париже. Его „Лекции по общей теории поверхностей" (Leçons sur la théorie générale des surfaces) (4 тома) представляют собой классическое произведение. Он не только обогатил дифференциальную геометрию новыми существенными результатами, но и оставил глубокий след в теории дифференциальных уравнений и разрешил важные задачи анализа и механики, постоянно показывая с непогрешимым изяществом, насколько драгоценным оказывается соединение геометрической интуиции с тонким использованием анализа.

[2]) Жорж Анри Альфан (George Henri Halphen) родился в Руане в 1844 г., умер в Версале в 1899 г. Офицер-артиллерист, некоторое время занимал должность экзаминатора в Политехнической школе; был членом Академии наук в Париже. Он был прежде всего алгебраистом и этой своей способностью с большим искусством пользовался для углубления различных вопросов не только в вычислительной и алгебраической геометрии, но также и в анализе. В своей диссертации на тему о дифференциальных инвариантах, представленной Парижскому математическому факультету в 1878 г., он построил такое дифференциальное уравнение конических сечений, которое существенным образом входит в указанные выше механические вопросы. Оставил большой трактат по эллиптическим функциям и их приложениям в трех томах, третий из которых не был закончен вследствие преждевременной смерти автора.

Для искомой величины силы тяжести, отнесенной к единице массы, найдем 28 *г* на поверхности Солнца и 0,16 *г* на поверхности Луны.

11. Рассмотрим планету, орбиту которой можно рассматривать приблизительно круговой, и предположим, что в заданный момент абсолютная величина v_0 скорости планеты подвергается мгновенному увеличению, после которого она становится равной $\sqrt{2}\, v_0$.

Доказать, что, начиная с этого момента, орбита должна сделаться гиперболической.

12. Применить теорию спутника к снаряду.

Надо принять во внимание, что если считать Землю за сферу, состоящую из однородных слоев, то притяжение во внешних ее точках будет изменяться обратно пропорционально квадрату расстояния r от центра и что в месте выстрела (расстояние, равное радиусу Земли R) притяжение равно g. Пусть k — есть коэффициент притяжения; тогда для величины силы притяжения на расстоянии r имеем $F=\frac{k}{r^2}$, а для потенциала $U=\frac{k}{r}$. В положении, где произведен выстрел, будем иметь

$$k=gR^2, \quad U=gR.$$

Обозначая через v^0 абсолютную величину начальной скорости и через α — угол наклона к горизонту, под которым сделан выстрел, будем иметь для секториальной скорости относительно центра Земли абсолютную величину, равную $Rv_0\cos\alpha$, так что две постоянные E и c (гл. II, § 2) определяются равенствами

$$E=\frac{1}{2}v_0^2-gR, \quad c^2=R^2v_0^2\cos^2\alpha.$$

После определения знака E и применения формулы (15), п. 6, т. е.

$$e=\sqrt{1+\frac{2Ec^2}{k^2}}=\sqrt{1+\frac{2Ev_0^2\cos^2\alpha}{g^2R^2}},$$

можно окончательно установить решение и исследовать его.

Принимая для R величину в 6,371 *км*, показать сначала, что если начальная скорость снаряда превосходит величину $\sqrt{2gR}=11{,}174$ *км/сек*, то он не упадет на Землю, а будет описывать гиперболическую (или прямолинейную) орбиту.

Разобрать далее (начиная с более простого случая горизонтального выстрела $\cos\alpha=1$) круговые или эллиптические орбиты, принимая во внимание, что наименьшее расстояние от центра должно быть больше R, без чего снаряд упал бы на Землю. Ср. Charbonnier, Balistique ext. rat., Paris, 1907 г., гл. IV.

13. В задаче двух тел S и P (п. 21) пусть в начальный момент будет r_0 расстояние SP и v_0 — абсолютная величина относительной скорости точки P по отношению к S. Показать на основании формулы (16), п. 8, что, если постоянная

$$a=\frac{r_0}{2-\frac{v_0^2r_0}{f(m+m_0)}}$$

положительна, то орбита, каково бы ни было направление начальной скорости v_0, будет эллиптической, и большая полуось ее будет как раз равна a.

14. Выбрав значения величин r_0, v_0 так, чтобы они удовлетворяли начальному условию, указанному в предыдущем пункте, рассмотреть все возможные направления для начальной скорости в заданной плоскости, проходящей через S. Каждому из них для точки P (планета) в заданной плоскости будет соответствовать относительно S (Солнце) некоторая эллиптическая орбита, в одном из фокусов которой будет находиться Солнце. Показать, что геометрическим местом центров C этих ∞^1 эллиптических орбит будет окружность с центром в одной из точек на прямой, соединяющей S с начальным положением P_0 точки P.

Можно взять систему осей с началом в S и осью x, проходящей через P_0 и направленной от S к P_0. Если для любой из рассматриваемых эллиптических орбит θ_0 будет угол между осью Sx и большой осью орбиты, направленной к перигелию, то, естественно, будем иметь

$$r_0 = \frac{p}{1 + e\cos\theta_0},$$

и так как (предыдущее упражнение) постоянная $\frac{r_0}{a}$ не зависит от направления начальной скорости, то мы видим, что для всех орбит, о которых здесь идет речь, эксцентриситет e и угол θ_0 будут связаны соотношением

$$\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta_0} = \lambda,$$

где λ обозначает постоянную $\frac{r_0}{a}$.

С другой стороны, полярные координаты центра C любой из рассматриваемых орбит относительно указанных осей определяются равенствами

$$\rho = ac, \quad \theta = \pi - \theta_0 \text{ и т. д.}$$

15. Для эллиптических орбит, указанных в предыдущих упражнениях, определить геометрические места перигелия, афелия и концов малой оси.

16. Треугольные решения задачи трех тел. Если три массы: m_0, m_1, m_2 занимают вершины P_0, P_1, P_2 равностороннего треугольника, то результирующая ньютонианского притяжения, которому подвергается одна какая-нибудь из них, например m_i, со стороны двух других проходит через центр тяжести и имеет величину

$$m_i f \frac{m_0 + m_1 + m_2}{\Delta^2} \frac{\rho_i}{\Delta} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

где Δ обозначает сторону треугольника и ρ_i — расстояние точки P_i от центра тяжести этих трех масс.

Это простое замечание (к нему можно прийти прямым геометрическим путем, принимая во внимание элементарные свойства центра тяжести) позволяет установить существование класса частных решений задачи трех тел. К этому классу можно прийти, замечая вместе с Лапласом, что достаточно заставить вращаться равносторонний треугольник в его плоскости вокруг центра тяжести трех масс с подходящей угловой скоростью ω, чтобы центробежная сила для каждой из трех масс уравновесила притяжение этой массы двумя другими.

Показать, что

$$\omega^2 = f \frac{m_0 + m_1 + m_2}{\Delta^3}$$

К этим решениям мы вернемся в § 10, гл. X и укажем наиболее общее исследование этого вопроса Лагранжем, от которого эта задача и ведет свое начало.

17. Прямолинейные решения задачи трех тел. Другой класс частных решений задачи трех тел (см. предыдущий пункт) найдем, исследуя условие, при котором для трех масс: m_0, m_1, m_2, расположенных в трех точках: P_0, P_1, P_2, лежащих на одной прямой, результирующая притяжения, которое одна из них испытывает со стороны двух других, пропорциональна ее расстоянию от центра тяжести системы.

Выбрав начало абсцисс в центре тяжести, будем иметь $\sum_{i=0}^{2} m_i x_i = 0$.

Если предположим, как это всегда можно сделать, что P_0 заключено между P_1 и P_2, и положим $A = \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1}$, то требуемое условие выразится уравнением пятой степени (Лагранжа)

$$(m_0 + m_1) A^5 + (2m_0 + 3m_1) A^4 + (m_0 + 3m_1) A^3 - (m_0 + 3m_2) A^2 - \\ - (2m_0 + 3m_2) A - (m_0 + m_2) = 0.$$

18. Если в задаче двух тел сумма масс изменяется в отношении, обратном линейной функции времени, то движение можно определить путем подходящей замены переменных.

Обращаясь к п. 21, положим $f(m_0 + m) = \frac{1}{\tau}$, причем по предположению τ должна быть линейной функцией времени. Если P_0 и P — два тела, то векторное уравнение относительного движения P по отношению к P_0 можно написать в виде

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -\frac{1}{\tau r^3}(P - P_0),$$

где r обозначает расстояние P_0P.

Это уравнение, как заметил Армеллини (в работе, упоминавшейся на стр. 165), приводится к обычной ньютонианской задаче (п. 2), в которой τ есть постоянная, если положить

$$P - P_0 = \tau (P_1 - P_0), \quad dt = \tau^2 dt_1;$$

в силу этого получим

$$\frac{d^2P_1}{dt_1^2} = -\frac{1}{r_1^3}(P_1 - P_0),$$

где через r_1 обозначена длина вектора $P_1 - P_0$.

19. Общее исследование *задачи двух тел с массами* произвольно изменяющимися было сделано Р. Армеллини. См. *Mem. della Soc. dei* XL, т. XIX, 1915, стр. 75—96; *Rend. Lincei*, т. XXIV, 1915_2, стр. 300—306; т. XXXI, стр. 170—173, т. I (серия 6^a), 1925, стр. 617—622.

20. В т. I, гл. VIII, § 7 мы видели, что две системы, геометрически подобные и имеющие в соответствующих точках одну и ту же плотность, оказываются также и материально подобными. Для динамического подобия требуется далее, чтобы отношение φ соответствующих сил было постоянным.

Показать, что это условие выполняется тогда, когда действуют исключительно ньютонианские силы, и что в этом случае будем иметь $\varphi = \lambda^4$, где λ обозначает коэффициент линейного геометрического подобия. Показать также, что отношение соответствующих времен равно единице.

21. В каком направлении изменяется параметр оскулирующей орбиты, когда масса центрального тела возрастает (если, например, на него падают метеориты)?

Принять во внимание формулу (14) п. 16, замечая, что в задаче двух тел сохраняет свое значение закон площадей, даже если массы и изменяются каким-либо образом.

22. Можно указать закон так называемых косвенных возмущений (т. е. относящихся к узлу и к наклонению), происходящих от возмущающей силы, нормальной к плоскости невозмущенной орбиты. Как увидим далее, мы придем к более определенному заключению, если эта возмущающая сила имеет характер восстанавливающей силы, направленной к плоскости первоначальной орбиты.

Из определения долготы узла θ и наклонения i (п. 25) следует, что направляющие косинусы секториальной скорости $V = \overrightarrow{OP} \times {}^{v}/_{2}$ при возмущенном каким-либо образом движении, как обычно, будут равны

$$\sin i \sin\theta, \quad -\sin i \cos\theta, \quad \cos i.$$

В частности, если речь идет о малых наклонениях, т. е. о таких, которые можно рассматривать как величины первого порядка, направляющие косинусы примут вид

$$\xi = i\sin\theta; \quad \eta = -i\cos\theta, \quad \zeta = 1;$$

это означает, что величина вектора V приблизительно равна его проекции $\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{2}$ на ось z. Далее, если, в частности, рассмотрим действие возмущающей силы Φ, нормальной к плоскости невозмущенной орбиты и, следовательно, имеющей составляющие 0, 0, Z, то мы сможем ее оценить, исходя из тождества

$$2\frac{dV}{dt} = \overrightarrow{OP} \times \Phi,$$

где в правой части вместо полной силы $A + \Phi$ (п. 27) поставлена только возмущающая сила, так как A является центральной силой.

Проектируя на ось z, получим

$$2\frac{dV_z}{dt} = 0$$

и, следовательно, $2V_z = c$; в силу предыдущего замечания, эту постоянную можно принять за длину вектора $2V$.

Отсюда, проектируя на две другие оси и подставляя вместо V_x, V_y их значения $\frac{c\xi}{2}$, $\frac{c\eta}{2}$, получим

$$\dot{\xi} = yZ, \quad \dot{\eta} = -xZ; \tag{2}$$

так как координаты x, y умножаются на величину первого порядка Z, то вместо них можно подставить их выражения, относящиеся к невозмущенному движению, которые полностью известны. Поэтому только что написанные уравнения могут служить в указанных выше предположениях для определения величин ξ и η, а следовательно, и для определения i и θ. Из этих уравнений получим

$$\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = -(x\xi + y\eta)Z,$$

где левая часть будет равна $i^2\dot\theta$, если принять во внимание приближенные выражения — $i\sin\theta$, $i\cos\theta$ для ξ и η; что же касается правой части, то, вспоминая, что $c\xi$, $c\eta$ суть составляющие вектора $2V$ по осям x, y, будем иметь

$$c\xi = y\dot z - \dot y z, \quad c\eta = z\dot x - \dot z x$$

и, следовательно,

$$x\xi + y\eta = -z.$$

Поэтому заключаем, что

$$i^2\dot\theta = zZ.$$

Отсюда видим, что знак у $\dot\theta$ будет всегда такой же, как и у произведения zZ; поэтому в случае возмущающей силы Z, имеющей характер восстанавливающей силы, направленной к плоскости первоначальной орбиты, узел совершает всегда попятное движение.

Другой комбинацией уравнений (2), определяющих $\dot\xi$, $\dot\eta$, будет

$$\frac{di}{dt} = \sin\theta\,\dot\xi - \cos\theta\,\dot\eta = (x\cos\theta + y\sin\theta)\,Z.$$

Если введем угол v, который радиус-вектор планеты образует с линией узлов (оскулирующей орбиты) в любой момент, то будем иметь уравнение

$$\frac{di}{dt} = rZ\cos v,$$

показывающее, что направление, в котором изменяется наклонение, в любой момент зависит от знака произведения $Z\cos v$.