Глава IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

1. От динамики материальной точки, которой мы занимались в трех предыдущих главах, перейдем теперь к динамике системы; чтобы упростить последующее изложение, рассмотрим в этой вводной главе некоторые производные механические понятия, относящиеся к изолированной точке (т. I, гл. VII), и распространим их на материальные системы, в частности на твердое тело, к которому в дальнейшем мы часто будем обращаться.

При этом, как и вообще во всей динамике системы, мы будем считать, как в т. I и, в частности, в геометрии масс (гл. X), что *всякую материальную систему какой угодно сложности можно рассматривать как совокупность материальных точек или, когда речь идет о непрерывном распределении материи, как совокупность материальных элементов.*

В общих рассуждениях этой и следующих глав мы будем обычно обращаться к материальной системе S какой угодно природы, но состоящей из конечного числа N материальных точек $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$. Необходимо, однако, раз навсегда заметить, что, рассматривая материальные элементы (одного, двух или трех измерений) как точки и применяя классические методы анализа бесконечно малых, мы можем считать все, что в дальнейшем будет говориться об этой системе S, имеющим силу также и для системы с непрерывным распределением материи, потому что в формулах, которые мы установим прямым путем, вместо сумм, распространенных на N точек дискретной системы S, можно подставить аналогичные интегралы по области (одного, двух или трех измерений), распространенные на все материальные элементы непрерывной системы (ср. т. I, гл. X, пп. 4, 15).

§ 1. Элементарная работа

2. Общее выражение. Рассмотрим систему S какой угодно природы из N материальных точек $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$, на которые наложены связи. Пусть эта система движется под действием определенных заданных сил. Сосредоточив внимание на всех силах (прямо приложенных и реакциях), действующих на систему, или же только на какой-нибудь части сил, механически вполне определенной (например, на действующих силах, или реакциях, или внешних силах и т. д.), обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую сил рассматриваемого вида, действующих на одну из точек P_i.

Если в какой-нибудь момент t вектор $\boldsymbol{v}_i$ есть скорость точки P_i, так что $dP_i = \boldsymbol{v}_i dt$ есть перемещение, которое она испытывает за время dt, непосредственно следующее за этим моментом t, то элементарная работа, совершенная силой $\boldsymbol{F}_i$ за это время, будет равна $\boldsymbol{F}_i \cdot dP_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt$ (т. I, гл. VIII, п. 3).

Далее, полной *элементарной работой* системы сил $\boldsymbol{F}_i$ от момента времени t до момента $t + dt$ называется сумма элементарных работ

$$dL = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt. \qquad (1)$$

Заметим еще, что так как перемещение системы зависит от принятой системы отсчета, то этот относительный характер перемещения отразится и на элементарной работе.

3. Случай твердого тела. а) Свободное твердое тело. К этому определению элементарной работы в общем случае мы не можем пока ничего добавить; но если система S представляет собой твердое тело, то скорости $\boldsymbol{v}_i$, а следовательно, и элементарные перемещения dP_i отдельных точек P_i можно выразить в любой момент посредством двух *характеристических векторов*, т. е. посредством скорости $\boldsymbol{v}_0$ какой-нибудь точки O, неизменно связанной с системой, и мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ самой системы. Таким образом, мы будем иметь (т. I, гл. III, п. 22)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}, \\ dP_i &= dO + \boldsymbol{\omega}\, dt \times \overrightarrow{OP_i} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Подставляя в равенство (1) и принимая во внимание векторное тождество

$$\boldsymbol{F}_i \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}] = \boldsymbol{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i],$$

получим

$$dL = dO \cdot \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\omega}\, dt \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{F}_i.$$

Две векторные суммы в правой части суть результирующая $\boldsymbol{R}$ (главный вектор) и результирующий момент (главный момент) $\boldsymbol{M}$ относительно точки O системы сил $\boldsymbol{F}_i$; таким образом мы получаем весьма замечательную формулу

$$dL = \boldsymbol{R} \cdot dO + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega})\, dt. \qquad (2)$$

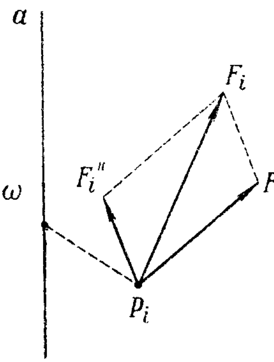
Если бы тело двигалось поступательно ($\omega = 0$), то выражение элементарной работы имело бы такой же вид, как и для одной силы $\boldsymbol{R}$, приложенной в точке O.

Далее, если речь будет итти о работе только всех внутренних сил, которые в силу своей природы составляют (т. I, гл. XII, п. 3) систему, векторно эквивалентную нулю ($\boldsymbol{R} = \boldsymbol{M} = 0$), то, очевидно, можно сказать, что *во время движения твердого тела при каких угодно связях и действующих силах сумма элементарных работ внутренних сил за любой элемент времени тождественно равна нулю.*

б) Твердое тело, имеющее неподвижную точку или ось. Если твердое тело закреплено в какой-нибудь точке и эта точка выбирается за центр приведения, то имеем $\boldsymbol{v}_0 = 0$, так что формула (2) сведется к равенству

$$dL = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt, \tag{3}$$

представляющему собой точную формальную аналогию с выражением элементарной работы одной только силы, причем роль силы играет результирующий момент рассматриваемых сил относительно закрепленной точки, а роль скорости выполняет угловая скорость твердого тела.



Фиг. 18.

Далее, если твердое тело вращается около закрепленной оси a (фиг. 18), то достаточно выбрать полюс O в какой-нибудь точке этой оси, как тотчас же будет применима формула (3), а так как мгновенная ось вращения постоянно совпадает с a, то вектор $\boldsymbol{\omega}$, изменяясь, вообще говоря, по величине в зависимости от времени, будет постоянно направлен по прямой a. Отсюда следует, что если эта ось ориентирована в ту сторону, которая в рассматриваемый момент указывается направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$, то вместо скалярного произведения $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$ можно подставить алгебраическое произведение величины ω угловой скорости на проекцию M_a момента $\boldsymbol{M}$ на ось (*результирующий момент сил F_i относительно оси a*).

Формула

$$dL = M_a \omega\, dt, \tag{4}$$

которая получается таким образом, очень важна для приложений. Она позволяет, например, вычислить мощность (или работу в единицу времени, т. I, гл. VIII, п. 12) вала двигателя, когда известно преодолеваемое сопротивление (а следовательно, и результирующий момент M_a относительно геометрической оси вала) и число n оборотов в единицу времени. Так как тогда угол поворота, пробегаемый в единицу времени, т. е. ω, есть $2\pi n$, то из равенства (4) следует, что мощность вала измеряется числом $2\pi n M_a$.

К равенству (4) можно прийти, между прочим, еще проще. Элементарное перемещение любой точки P_i, расстояние которой от оси вращения a есть δ_i, перпендикулярно к плоскости $P_i a$ и измеряется произведением $\delta_i \omega\, dt$; поэтому, если F'_i есть составляющая силы $\boldsymbol{F}_i$, приложенной в точке P_i, по направлению dP_i, то элементарная работа силы $\boldsymbol{F}_i$ будет равна $F'_i \delta_i \omega\, dt$. Но $F'_i \delta_i$ есть как раз момент $M_i|_a$ силы $\boldsymbol{F}_i$ относительно оси a. Действительно, если разложим силу $\boldsymbol{F}_i$ на две составляющие, из которых одна $\boldsymbol{F}'_i$ направлена по dP_i, а другая $\boldsymbol{F}''_i$ есть проекция этой силы на плоскость $P_i a$, то увидим, с одной стороны, что момент силы $\boldsymbol{F}''_i$ относительно оси a (компланарной с $\boldsymbol{F}''_i$) равен нулю. С другой стороны, момент силы $\boldsymbol{F}'_i$ есть как раз $F'_i \delta_i$, потому что $\boldsymbol{F}'_i$ перпендикулярна к плоскости $P_i a$, а δ_i измеряет кратчайшее расстояние линии действия силы $\boldsymbol{F}'_i$ от оси a и, кроме того, F'_i будет положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли сила проектироваться в направлении перемещения или в противоположном, или же, если ось a ориентирована в направлении вектора ω, в зависимости от того, будет ли сила $\boldsymbol{F}_i$ правовращающей или левовращающей относительно a. Отсюда на основании теоремы Вариньона (т. I, гл. I, п. 31) заключаем, что $F'_i \delta_i$ есть момент $M_i|_a$ силы $\boldsymbol{F}_i$ относительно оси a, так что элементарную работу силы $\boldsymbol{F}_i$ можно выразить в виде

$$M_i|_a \omega dt;$$

после этого достаточно просуммировать по всем точкам системы, чтобы вновь получить формулу (4).

4. Голономные системы. Для дальнейшего изложения необходимо вывести уже встречавшееся в аналитической статике для виртуальных перемещений (т. I, гл. XV, § 6) выражение элементарной работы системы сил $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, приложенных к N материальным точкам P_i голономной системы. Если эта система имеет n степеней свободы и положения ее точек определяются N параметрическими уравнениями

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t) \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{5}$$

где q_h $(h=1, 2, \ldots, n)$ — независимые лагранжевы координаты [1]), то любое бесконечно малое (действительное) перемещение системы определяется равенством

$$dP_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

[1]) См. т. I, гл. VI.

Поэтому для соответствующей элементарной работы системы из N сил F_i, выраженных через обобщенные координаты q_h, лагранжевы скорости $\dot{q}_h$ (т. I, гл. VI, п. 10) и время, мы получим выражение

$$dL = \sum_{h=1}^{n} dq_h \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + dt \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t},$$

которое можно переписать в виде

$$dL = \sum_{h=1}^{n} Q_h dq_h + dt \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}, \tag{6}$$

где, как и в аналитической статике, положено

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. через Q_h обозначена так называемая составляющая системы сил F_i по лагранжевой координате q_h или, иначе, обобщенная сила, соответствующая координате q_h.

В правой части равенства (6) вторая сумма тождественно исчезает, когда голономные связи не зависят от времени ($\partial P_i/\partial t = 0$).

5. Виртуальная работа и некоторые замечательные тождества. Если вспомним, что при любом виртуальном перемещении выражения δP_i отличаются от только что названных действительных перемещений dP_i только тем, что в виртуальных перемещениях во всяком случае (т. е. зависят ли, или не зависят связи от времени) отсутствует член с dt, то для виртуальной элементарной работы

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \quad .$$

придем к выражению

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h, \tag{7}$$

уже полученному в п. 28, гл. XV, т. I.

Если, далее, силы F_i являются производными от потенциала U, где U есть функция декартовых координат точек системы в смысле, указанном в п. 28 гл. XV т. I, то этот потенциал, выраженный в лагранжевых координатах посредством параметрических уравнений (5), вообще говоря, будет функцией от q, а также и от времени, если связи зависят от времени. Во всяком случае мы знаем уже (упомянутое место), что $\delta L = \delta U$, где δU

обозначает полный дифференциал от функции U, рассматриваемой как функция от q, т. е.

$$\delta U = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_h} \delta q_h;$$

поэтому, приравнивая правые части этого равенства и равенства (6) и принимая во внимание произвольность δq_h, мы получим следующие выражения для обобщенных сил в случае консервативной системы

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

К этим выводам, которые будут полезны в последующем изложении, здесь можно прибавить некоторые интересные замечания, относящиеся к случаю твердого тела. Предполагая, что речь идет о свободном твердом теле, примем за его обобщенные координаты декартовы координаты α, β, γ какой-нибудь точки O, неизменно связанной с телом относительно заданных неподвижных осей $\Omega\xi\eta\zeta$, и обычные углы Эйлера θ, φ, ψ, определяющие положение тела по отношению к этим осям. Для виртуальной работы в этом случае будем иметь выражение

$$\delta L = Q_\alpha \delta\alpha + Q_\beta \delta\beta + Q_\gamma \delta\gamma + Q_\theta \delta\theta + Q_\varphi \delta\varphi + Q_\psi \delta\psi, \tag{8}$$

где обобщенные силы Q имеют обычное формальное определение (предыдущий пункт) относительно принятой системы координат.

Обобщенные силы Q в рассматриваемом здесь частном случае допускают интересное механическое истолкование, к которому мы придем, сравнивая выражение (8) с другим выражением той же величины δL, которое можно получить прямо. С этой целью вспомним из кинематики (т. I, гл. VI, п. 15), что любое виртуальное перемещение твердого тела определяется равенством

$$\delta P_i = \delta O + \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где δO обозначает виртуальное перемещение точки O и $\boldsymbol{\omega}'$ — соответствующее виртуальное вращение. Эти выражения δP_i получаются из аналогичных выражений dP_i действительного элементарного перемещения (п. 3) путем подстановки δO и ω' вместо dO и ωdt, так что, выполняя эту подстановку в равенстве (2), найдем

$$\delta L = \boldsymbol{R} \cdot \delta O + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}',$$

где $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ обозначают главный вектор и главный момент относительно точки O сил $\boldsymbol{F}_i$.

Замечая теперь, что составляющие δO по осям $\Omega\xi\eta\zeta$ суть $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, и обозначая через R_ξ, R_η, R_ζ аналогичные составляющие главного вектора $\boldsymbol{R}$, вместо первого слагаемого будем иметь выражение

$$R \cdot \delta O = R_\xi \delta\alpha + R_\eta \delta\beta + R_\zeta \delta\gamma.$$

Что же касается второго слагаемого $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'$, то вспомним из кинематики (т. I, гл. III, п. 34), что при действительном элементарном перемещении элементарное вращение $\boldsymbol{\omega}\,dt$ определяется равенством

$$d\theta\boldsymbol{N}+d\varphi\boldsymbol{k}+d\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

где $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, как обычно, обозначают единичные векторы линии узлов, оси Oz, неизменно связанной с твердым телом, и оси $\Omega\zeta$ неподвижной системы координат. Поэтому элементарному виртуальному вращению можно придать вид

$$\boldsymbol{\omega}'=\delta\theta\boldsymbol{N}+\delta\varphi\boldsymbol{k}+\delta\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

после чего, обозначая через M_N, M_z, M_ζ составляющие момента $\boldsymbol{M}$ по линии узлов и осям Oz, $\Omega\zeta$, найдем

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'=M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi.$$

Таким образом, заключаем, что

$$\delta L=R_\xi\delta\alpha+R_\eta\delta\beta+R_\zeta\delta\gamma+M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi,$$

и достаточно отождествить это выражение с выражением (8) для δL, чтобы получить следующие шесть уравнений, дающих упоминавшееся выше механическое истолкование для обобщенных сил Q:

$$Q_\alpha=R_\xi,\qquad Q_\beta=R_\eta,\qquad Q_\gamma=R_\zeta,$$
$$Q_\theta=M_N,\qquad Q_\varphi=M_z,\qquad Q_\psi=M_\zeta.$$

Если имеется в виду твердое тело с одной закрепленной (относительно $\Omega\xi\eta\zeta$) точкой, и мы выберем эту точку за полюс O, то останутся в силе уравнения второй тройки; в том случае, когда силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, предыдущие равенства дадут механическое истолкование частных производных от U по α, β, γ, θ, φ, ψ.

§ 2. Кинетическая энергия или живая сила

6. Рассмотрим снова какую-нибудь материальную систему S, состоящую из N точек, и обозначим через m_i массу любой точки P_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Если для системы S задано движение (относительно определенной системы ориентировки), то мы будем называть *кинетической энергией или живой силой* системы в любой момент сумму

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_i^2 \tag{9}$$

кинетических энергий или живых сил в этот момент составляющих систему материальных точек. Кинетическая энергия системы есть скалярная величина, всегда существенно положительная, за исключением