Что же касается второго слагаемого $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'$, то вспомним из кинематики (т. I, гл. III, п. 34), что при действительном элементарном перемещении элементарное вращение $\boldsymbol{\omega}dt$ определяется равенством

$$d\theta\boldsymbol{N}+d\varphi\boldsymbol{k}+d\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

где $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, как обычно, обозначают единичные векторы линии узлов, оси Oz, неизменно связанной с твердым телом, и оси $\Omega\zeta$ неподвижной системы координат. Поэтому элементарному виртуальному вращению можно придать вид

$$\boldsymbol{\omega}'=\delta\theta\boldsymbol{N}+\delta\varphi\boldsymbol{k}+\delta\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

после чего, обозначая через M_N, M_z, M_ζ составляющие момента $\boldsymbol{M}$ по линии узлов и осям Oz, $\Omega\zeta$, найдем

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'=M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi.$$

Таким образом, заключаем, что

$$\delta L=R_\xi\delta\alpha+R_\eta\delta\beta+R_\zeta\delta\gamma+M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi,$$

и достаточно отождествить это выражение с выражением (8) для δL, чтобы получить следующие шесть уравнений, дающих упоминавшееся выше механическое истолкование для обобщенных сил Q:

$$\begin{array}{lll} Q_\alpha=R_\xi, & Q_\beta=R_\eta, & Q_\gamma=R_\zeta, \\ Q_\theta=M_N, & Q_\varphi=M_z, & Q_\psi=M_\zeta. \end{array}$$

Если имеется в виду твердое тело с одной закрепленной (относительно $\Omega\xi\eta\zeta$) точкой, и мы выберем эту точку за полюс O, то останутся в силе уравнения второй тройки; в том случае, когда силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, предыдущие равенства дадут механическое истолкование частных производных от U по α, β, γ, θ, φ, ψ.

§ 2. Кинетическая энергия или живая сила

6. Рассмотрим снова какую-нибудь материальную систему S, состоящую из N точек, и обозначим через m_i массу любой точки P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$. Если для системы S задано движение (относительно определенной системы ориентировки), то мы будем называть *кинетической энергией или живой силой* системы в любой момент сумму

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \tag{9}$$

кинетических энергий или живых сил в этот момент составляющих систему материальных точек. Кинетическая энергия системы есть скалярная величина, всегда существенно положительная, за исключением случая мгновенной остановки всех точек системы, когда эта величина сводится к нулю. Очевидно, что кинетическая энергия, как и движение, для которого она определяется, имеет относительный характер и зависит от выбора системы осей. Но из того же определения (9) ясно, что T не изменится, когда первоначальная система координат будет заменена другой системой отсчета, неподвижной относительно первой.

В динамике, когда говорят о живой силе, не уточняя дальше этого понятия, принято подразумевать, что движение отнесено к неподвижной или, лучше сказать, к галилеевой системе отсчета.

7. Движение системы S, о котором мы говорили в предыдущем определении, задавалось относительно определенной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, которую мы будем называть *неподвижной*, хотя в настоящем изложении она может также и не быть таковой в механическом смысле слова. Иногда случается, что для того, чтобы лучше охватить ход явления, приходится ввести в виде вспомогательной системы отсчета, наряду с системой $\Omega\xi\eta\zeta$, систему $Oxyz$, начало которой O движется по выбранному закону, а оси сохраняют неизменные направления относительно осей неподвижной системы, например остаются параллельными и одинаково направленными с осями ξ, η и ζ. Движение системы S относительно $Oxyz$ называется движением системы *относительно точки* O. Причина такого названия будет ясна, если мы обратим внимание на то, что заданное движение S относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ можно рассматривать как абсолютное движение, получающееся в результате только что определенного относительного движения и переносного чисто поступательного движения осей $Oxyz$ относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. I, гл. IV, § 1).

Если обозначим через $\boldsymbol{v}'$ скорость точки O относительно системы осей $\Omega\xi\eta\zeta$ и через $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ — скорость любой точки P_i в ее движении относительно точки O (т. е. относительно системы осей $Oxyz$), то в силу теоремы об относительном движении (т. I, гл. IV, п. 2) будем иметь

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_i^{(r)};$$

поэтому, замечая, что формулу (9) можно написать в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i,$$

заключаем, что

$$T = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{(r)2} + \boldsymbol{v}' \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}, \tag{10}$$

где через m обозначена полная масса системы.

Равенство (10) представляет живую силу системы в ее движении относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$ в виде суммы трех членов: живой силы, которую имела бы точка O, если бы она была материальной точкой с массой, равной полной массе системы, живой силы системы в ее движении относительно точки O и, наконец, количества, не имеющего более формы живой силы и которое можно назвать *составным*, поскольку оно зависит как от движения точки O, так и от относительного движения.

8. Теорема Кёнига [1]. Формула (10), замечательная сама по себе, становится особенно важной, когда за точку O вспомогательной системы принимается центр тяжести G системы, и, следовательно (это полезно повторить), движение системы S рассматривается относительно системы с началом в G, оси которой сохраняют неизменными направления относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$. В этом предположении третий член равенства (10) принимает вид

$$\boldsymbol{v}_G \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{v}_G$ обозначает (абсолютную) скорость центра тяжести, а $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ — скорость любой точки P_i относительно самого центра тяжести. Но векторное тождество, определяющее положение центра тяжести (т. I, гл. X, п. 8), имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i} = 0.$$

Если вспомогательная точка O совпадает с G, то достаточно взять производную по времени относительно осей $Gxyz$, чтобы заметить, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)} = 0.$$

Отсюда находим, что в формуле (10) третий член (11) при этих условиях тождественно равен нулю. Таким образом, имеем

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{(r)2} \tag{12}$$

или словами (теорема Кёнига):

[1] Самуил Кёниг (Samuel König), голландец, родился в княжестве Изенбург в 1712 г., умер в синьории Цуилештейн в 1757 г. Ученик Иоганна Бернулли, сперва преподавал математику, потом был библиотекарем принца Оранского и, наконец, профессором философии и естественного права в Айа.

Живая сила какой угодно системы, находящейся в движении, в любой момент равна сумме живой силы, которую в этот момент имел бы центр тяжести, если бы он был материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы, и живой силы, которую в тот же момент имеет вся система в ее движении относительно центра тяжести.

Формула (10) и теорема Кёнига имеют особую важность для твердых тел. Однако выражению для живой силы твердого тела можно придать особый вид, благодаря чему этот случай заслуживает того, чтобы рассмотреть его независимым путем.

9. Живая сила твердого тела. Обозначим в случае движения твердого тела S, как обычно, через $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ скорость какой-либо точки O, неизменно связанной с телом S, и угловую скорость движения вокруг оси, проходящей через эту точку; обозначим, далее, через u, v, w, p, q, r — характеристические величины состояния движения, т. е. проекции векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ на оси некоторой системы $Oxyz$, неизменно связанной с твердым телом.

Возьмем опять известные выражения

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

для скоростей отдельных точек P_i твердого тела и подставим их в формулу (9), определяющую живую силу T, а квадраты скоростей отдельных точек представим в виде скалярных произведений вектора $\boldsymbol{v}$ на самого себя, т. е. $\boldsymbol{v}_i^2 = \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i$.

Полагая

$$\left.\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} v_0^2 \sum_{i=1}^{N} m_i, \\ T'' &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}\}^2, \\ T''' &= \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_0 \cdot \{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}\}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

будем иметь

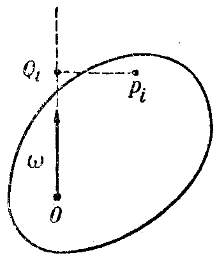
$$T = T' + T'' + T'''. \tag{14}$$

Следует отметить, что это разложение T воспроизводит для случая твердого тела и для точки, неизменно связанной с ним, три члена, на которые в случае любой материальной системы разбивается живая сила в формуле (10), п. 7. Теперь мы выразим T' T'' и T''' через шесть характеристических величин.

Для первого слагаемого T', которое давало бы полную живую силу твердого тела, если бы движение было чисто поступательным, имеем непосредственно

$$T' = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2), \qquad (13)_1$$

где, как обычно, через m обозначена полная масса твердого тела.



Фиг. 19.

Для того чтобы найти явное выражение второго слагаемого T'', которое давало бы полную живую силу, если бы точка O, неизменно связанная с твердым телом, была неподвижной, надо найти длину δ_i расстояния P_iQ_i (фиг. 19) любой точки P_i твердого тела от мгновенной оси вращения относительно системы осей с началом в точке O, т. е. от прямой, проходящей через O в направлении ω. Так как модуль вектора $\omega \times \overrightarrow{OP_i}$ равен $\delta_i\omega$, то, вынося ω^2 как общий множитель за скобки, найдем, что

$$T'' = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

где

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \delta_i^2$$

есть момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через O (т. I, гл. X, п. 18). Если α, β, γ суть направляющие косинусы этой оси, то момент инерции I определяется (упомянутое выше место, п. 22) равенством

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\gamma\alpha - 2C'\alpha\beta,$$

где через A, B, C и A', B', C' обозначены моменты инерции и произведения инерции (центробежные моменты) твердого тела относительно осей $Oxyz$, неизменно связанных с ним. Если через x_i, y_i, z_i обозначим координаты точки P_i, то эти величины представятся в виде

$$A = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2), \qquad B = \sum_{i=1}^{N} m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$C = \sum_{i=1}^{m_i} m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

$$A' = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i, \quad B' = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i x_i, \quad C' = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i.$$

Так как направляющие косинусы мгновенной оси вращения определяются равенствами

$$\alpha = \frac{p}{\omega}, \qquad \beta = \frac{q}{\omega}, \qquad \gamma = \frac{r}{\omega},$$

то будем иметь

$$T'' = \frac{1}{2} I\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq\} \qquad (13)_2$$

Переходя, наконец, к третьему слагаемому T''', заметим, что по известному свойству смешанного произведения (т. I, гл. I, п. 25) его можно написать в виде

$$T''' = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i} \cdot (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}).$$

После этого, вводя радиус-вектор $\overrightarrow{OG}$ центра тяжести G твердого тела, удовлетворяющий соотношению

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i},$$

мы получим

$$T''' = m\overrightarrow{OG} \cdot (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) = m \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}, \qquad (13)_3$$

где через x_0, y_0, z_0 обозначены координаты центра тяжести.

Из равенства (14) и из формул $(13)_1$, $(13)_2$, $(13)_3$ следует, что живая сила твердого тела в общем случае выражается в виде квадратичной формы от характеристических величин состояния движения u, v, w, p, q, r.

Важно обратить внимание на некоторые частные случаи установленных ранее общих формул.

Если центр приведения O (который в то же время является началом координат) выбирается в центре тяжести, а за оси координат принимаются соответствующие главные оси инерции, то будут равны нулю координаты x_0, y_0, z_0 центра тяжести, а вместе с ними и три произведения инерции (центробежные моменты): A', B', C', тогда как A, B, C будут теперь тремя главными центральными моментами инерции; поэтому для живой силы мы получим очень простое выражение

$$T = \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \qquad (15)$$

которое в согласии с теоремой Кёнига (п. 8) дает разложение T на сумму живой силы, которую имел бы центр тяжести, если бы в нем была сосредоточена вся масса m системы S, и живой силы твердого тела в его движении относительно центра тяжести.

10. Твердое тело, имеющее неподвижную точку или неподвижную ось. Если тело S закреплено в одной из своих точек, то достаточно выбрать эту точку O за центр приведения неизменяемой системы (и за начало осей, неизменно связанных с твердым телом), чтобы исчезли u, v, w и, следовательно, T' и T'''; тогда живая сила тела определится равенством

$$T = T'' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq). \quad (16)$$

Если подвижные оси (неизменно связанные с твердым телом) совместить с главными осями инерции в закрепленной точке, то будем иметь еще более простое выражение:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (17)$$

Равенство (16), естественно, сохраняет свое значение также и в случае твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси a (лишь бы начало O подвижной системы было взято на этой прямой), но поскольку в этом случае угловая скорость ω неизменно сохраняет направление оси a, то, если совместить с этой осью вращения одну из неподвижных осей, например ось x, кроме величин u, v, w, будут равны нулю также q и r, так что равенство (16) получит вид

$$T = \frac{1}{2}Ap^2 \quad (18)$$

или же, так как $|\boldsymbol{\omega}| = p$,

$$T = \frac{1}{2}A\omega^2, \quad (18')$$

где A обозначает момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

К этой формуле (18'), широко применяемой в приложениях, легко можно прийти и прямым элементарным путем. Достаточно припомнить, что для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси a с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, скорость точки P_i, расстояние которой от оси есть δ_i, по абсолютной величине определяется произведением $\delta_i\omega$ (п. 4), так что живая сила этой точки будет равна

$$\frac{1}{2}m_i\delta_i^2\omega^2;$$

отсюда, суммируя по всем точкам системы, получим для живой силы тела выражение

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2,$$

очевидно, совпадающее с выражением (18').

11. Живая сила голономной системы в лагранжевых координатах. В динамике голономных систем существенная роль принадлежит выражению живой силы в лагранжевых координатах. Пусть дана голономная система из N точек $P_i (i=1, 2, \ldots, N)$, имеющая n степеней свободы, тогда мы можем предположить (т. I, гл. VI, п. 1), что положения точек системы определяются параметрическими уравнениями вида (5)

$$P_i=P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t), \quad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Взяв производную по времени, получим отсюда выражения для скоростей (возможных) $\boldsymbol{v}_i$ отдельных точек P_i (в функциях от координат q, лагранжевых скоростей $\dot{q}$ и времени t)

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial P_i}{\partial t}, \qquad (i=1, 2, \ldots, N); \tag{19}$$

достаточно подставить эти выражения в равенство

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i,$$

чтобы видеть, что *живая сила голономной системы есть целая рациональная функция второй степени от $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от q и t.* Поэтому можно написать

$$T=T_2+T_1+T_0, \tag{20}$$

где через T_2, T_1, T_0 обозначены соответственно совокупность членов второй степени относительно $\dot{q}$, совокупность членов первой степени относительно $\dot{q}$ и, наконец, совокупность членов, не зависящих от $\dot{q}$.

Если связи не зависят от времени, то выражения (19) скоростей $\boldsymbol{v}_i$ сводятся к их линейной однородной части относительно $\dot{q}$

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h, \qquad (i=1, 2, \ldots, N) \tag{19'}$$

и не будут больше содержать t в коэффициентах, поэтому T будет *квадратичной формой* относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от координат q. Явное выражение T будет иметь вид

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k;$$

достаточно изменить порядок суммирования и положить

$$a_{hk}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_h}\frac{\partial\xi_i}{\partial q_k}+\frac{\partial\eta_i}{\partial q_h}\frac{\partial\eta_i}{\partial q_k}+\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_h}\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_k}\right),\qquad(21)$$

чтобы заключить, что

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k,\qquad(22)$$

где коэффициенты a_{hk} зависят только от координат q.

Эта форма поэтому является общим выражением *живой силы голономной системы со связями, не зависящими от времени, и с n степенями свободы.*

Важно отметить, что эта квадратичная форма (22) в переменных $\dot{q}$ по своей природе является *определенной положительной*, т. е. остается большей нуля при каком угодно выборе аргументов $\dot{q}$, за исключением случая, когда исчезают все обобщенные скорости $\dot{q}$ и когда она становится равной нулю. Чтобы в этом убедиться, заметим, что живая сила T в силу своего определения (9) в функции от скоростей v_i остается всегда положительной, за исключением случая, когда исчезают все v_i; в этом случае форма (22) будет равна нулю. Остается поэтому только показать, что все $\dot{q}$ будут нулями тогда и только тогда, когда нулями будут и все v.

На основании соотношений (19′) мы непосредственно видим, что, когда $\dot{q}_h=0\ (h=1, 2, \ldots, n)$, то также и $v_i=0\ (i=1, 2, \ldots, N)$, а с другой стороны, мы видим, что равенство $v_i=0\ (i=1, 2, \ldots, N)$ может иметь место только в том случае, когда все скорости $\dot{q}$ удовлетворяют линейной однородной системе

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\xi_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0,\quad\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\eta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0,\quad\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0\quad(i=1, 2, \ldots, N),$$

из которой как раз и следует, что $\dot{q}_h=0\ (h=1, 2, \ldots, n)$, поскольку якобиева матрица от ξ, η, ζ по q вследствие предположения о независимости этих лагранжевых координат при любых значениях их должна иметь ранг n (т. I, гл. VI, п. 2). Заметим еще, что если в противоположность тому, что предполагалось ранее, связи зависят от времени, то те вычисления, которые только что привели нас к выражению для кинетической энергии T, дадут ее однородную квадратичную часть T_2.

Действительно, чтобы получить T_2, достаточно подставить в формулу (9) вместо каждого $\boldsymbol{v}_i$ не полное выражение (19), а только его однородную часть, которая формально тождественна с (19′), с той только разницей, что коэффициенты зависят, кроме q, еще и от t. Отсюда следует, что если мы и в этом случае введем обозначения (21), то сможем написать

$$T_2 = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k, \tag{22'}$$

где, как и в только что указанной формуле, коэффициенты суть вполне определенные функции от q и времени.

Тем же путем, каким мы пришли к выражению (22), доказывается, что квадратичная форма T_2 также всегда будет определенной положительной.

Заметим еще, кроме того, что как в том, так и в другом случае определитель $\|a_{hk}\|$ из n коэффициентов a_{hk}, как дискриминант определенной (положительной) формы, не может обращаться в нуль тождественно. Действительно, если бы этот определитель был тождественно равен нулю, то существовало бы n значений $\dot{q}$, не исчезающих одновременно и удовлетворяющих n линейным однородным уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножая предыдущее равенство на $\dot{q}_h$ и суммируя почленно по h от 1 до n, мы для такой системы значений $\dot{q}$ имели бы

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = 0.$$

Это соотношение согласно теореме Эйлера сведется либо к равенству $T = 0$, если связи не зависят от времени, либо к равенству $T_2 = 0$ в случае связей, зависящих от времени. Это заключение противоречит характеру определенной (положительной) формы, который мы установили выше для T и T_2.