§ 3. Количество движения и момент количеств движения системы

12. Количество движения системы. *Количеством движения* (или также *импульсом*) системы в любой момент называется векторная сумма

$$Q = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \tag{23}$$

количеств движения, которые имеют в рассматриваемый момент отдельные точки P_i системы.

Если возьмем производную по времени от векторного равенства, определяющего положение центра тяжести G системы относительно некоторой *неподвижной* точки O (т. I, гл. X, п. 8)

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i,$$

то, обозначая через v_G скорость точки G, получим

$$mv_G = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i$$

или же в силу определения (23)

$$Q = mv_G. \tag{24}$$

Поэтому имеем теорему:

Количество движения какой угодно материальной системы в любой момент равно количеству движения центра тяжести системы в этот момент, если бы он был такой материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы.

13. Момент количеств движения системы. *Моментом количеств движения (или кинетическим моментом)* относительно какой-нибудь точки O какой угодно материальной системы S в любое мгновение называется результирующий момент относительно O всех количеств движения отдельных точек P_i системы (приложенных в соответствующих точках), т. е. векторная величина

$$K = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i v_i. \tag{25}$$

Кинетической *парой* системы иногда называется всякая пара с моментом K (ср. т. I, гл. I, п. 48).

Так как количество движения Q и момент количеств движения K суть не что иное, как результирующая и результирующий момент относительно любой точки O системы векторов $m_i\boldsymbol{v}_i$, каждый из которых приложен в соответствующей точке P_i, то момент $\boldsymbol{K}'$ количеств движения относительно какой-нибудь другой точки O' определится равенством (т. I, гл. I, п. 33)

$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K} + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{Q}.$$

К другому результату, который не только интересен сам по себе, но и будет использован в дальнейшем (гл. V, п. 10), мы придем, если за центр приведения моментов возьмем центр тяжести G системы.

Если введем скорости $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ движения точек системы относительно G, то (согласно п. 7) будем иметь

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}_i^{(r)} \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если теперь примем во внимание, что по самому определению центра тяжести

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i} = 0,$$

то, принимая за центр приведения центр тяжести, получим из формулы (25)

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP_i} \times m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}.$$

Так как в правой части стоит результирующий момент относительно точки G *относительных* количеств движения $m_i\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ отдельных точек системы, то заключаем, что *как бы система ни двигалась, момент (абсолютный) количеств движения относительно центра тяжести совпадает с аналогичным относительным моментом количеств движения по отношению к самому центру тяжести.*

14. Производная по времени от момента количеств движения системы. Для последующего важно иметь явное выражение производной по времени от момента количеств движения $\boldsymbol{K}$. Если через $\boldsymbol{v}'$ обозначить скорость точки O и через $\boldsymbol{a}_i$ — ускорение точки P_i, то из равенства (25) следует, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times m_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}') \times m_i \boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times m_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}' \times \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i;$$

Отсюда, замечая, что $\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i$ тождественно равно нулю и принимая во внимание равенство (24), получим

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q}. \tag{26}$$

Это и есть искомая формула.

Если центр приведения неподвижен ($\boldsymbol{v}' = 0$), то формула (26) упрощается и принимает вид

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i. \tag{27}$$

Здесь особенно важно заметить, что формула (27) сохраняет свое значение даже и тогда, когда центр приведения O (не будучи, вообще говоря, неподвижным) в любой момент совпадает с центром тяжести системы. Действительно, в этом случае член $\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q}$, появляющийся в общей формуле (26), будет тождественно равен нулю, потому что скорость $\boldsymbol{v}'$ центра приведения совпадает со скоростью $\boldsymbol{v}_G$ центра тяжести и вектор количества движения $\boldsymbol{Q}$ на основании формулы (24) коллинеарен с вектором $\boldsymbol{v}'$.

15. Количество движения и момент количеств движения твердого тела. Если движущаяся система S представляет собой твердое тело и за центр приведения O принимается точка, неизменно связанная с системой, то два вектора $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ очень просто выражаются через характеристики u, v, w, p, q, r состояния движения системы, относящиеся к каким-нибудь подвижным (неизменно связанным с телом) осям $Oxyz$. Точнее можно сказать, *проекции векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ на оси $Oxyz$ равны частным производным от живой силы T твердого тела по переменным u, v, w и p, q, r соответственно.*

Действительно, возьмем равенство

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(v_i^2|_x + v_i^2|_y + v_i^2|_z\right)$$

и примем во внимание соотношения

$$\left.\begin{aligned} v_i|_x &= u + qz_i - ry_i, \\ v_i|_y &= v + rx_i - pz_i, \\ v_i|_z &= w + py_i - qx_i, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

которые получаются путем проектирования на оси векторного равенства $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}_i$. Рассматривая теперь T как функцию от u, v, w, p, q, r, составляющуюся при помощи выражений (28), возьмем от нее частную производную сначала по u. Так как согласпо формулам (28) от u зависит только $v_i|_x$ и мы имеем

$$\frac{\partial v_i|_x}{\partial u}=1,$$

то получим тождество

$$\frac{\partial T}{\partial u}=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i|_x,$$

правая часть которого есть не что иное, как проекция Q_x вектора Q на ось x. Поэтому, принимая во внимание результаты, которые получатся после круговой перестановки букв x, y, z и u, v, w, будем иметь:

$$Q_x=\frac{\partial T}{\partial u},\quad Q_y=\frac{\partial T}{\partial v},\quad Q_z=\frac{\partial T}{\partial w}. \tag{29}$$

Далее, если возьмем производную от T по p, то так как $v_i|_x$ не зависит, а $v_i|_y$ и $v_i|_z$ зависят от p, будем иметь

$$\frac{\partial v_i|_y}{\partial p}=-z_i,\quad \frac{\partial v_i|_z}{\partial p}=y_i.$$

Таким образом, приходим к тождеству

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\sum_{i=1}^{N} m_i(-z_i v_i|_y+y_i v_i|_z)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(y_i m_i v_i|_z-z_i m_i v_i|_y),$$

в котором правая часть есть проекция K_x вектора K на ось x; при помощи круговой перестановки букв x, y, z и p, q, r получим

$$K_x=\frac{\partial T}{\partial p},\quad K_y=\frac{\partial T}{\partial q},\quad K_z=\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{30}$$

Если мы не добавим никакого частного предположения ни о движении твердого тела, ни о его материальной структуре, ни о выборе подвижных осей, то для T необходимо принять общее выражение, даваемое равенствами (13) и (14) п. 9, и тогда для проекции векторов Q и K получатся следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} Q_x&=m(u+z_0q-y_0r),\\ Q_y&=m(v+x_0r-z_0p),\\ Q_z&=m(w+y_0p-x_0q),\end{aligned}\right\} \tag{29'}$$

$$\left.\begin{aligned} K_x&=Ap-C'q-B'r+m(y_0w-z_0v),\\ K_y&=-C'p+Bq-A'r+m(z_0u-x_0w),\\ K_z&=-B'p-A'q+Cr+m(x_0v-y_0u).\end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

Заметим еще, что, применяя теорему Эйлера об однородных функциях к выражению живой силы T, рассматриваемому, как квадратичная форма от шести величин, характеризующих кинематическое состояние тела, и принимая во внимание уравнения (29), (30), мы получим для живой силы замечательное выражение

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{Q} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K}.$$

Если полюс O совпадает с центром тяжести ($\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_0$), то это выражение можно написать в виде

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega K}.$$

16. Канонические формы для проекции векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$. Твердое тело с закрепленной точкой или отнесенное к системе осей с началом в центре тяжести. Если за центр O приведения моментов (и начала подвижных осей) возьмем центр тяжести твердого тела, так что одновременно исчезнут x_0, y_0, z_0, то формулы (29′) приведутся к каноническому виду

$$Q_x = mu, \quad Q_y = mv, \quad Q = mw \tag{29''}$$

и будут выражать уже известное тождество вектора $\boldsymbol{Q}$ с количеством движения, которое имел бы центр тяжести, если бы в нем была сосредоточена вся масса m твердого тела (п. 12).

Что же касается проекций (30′) вектора $\boldsymbol{K}$, то очевидно, что в каждой из них последние члены сведутся к нулю как в том случае, когда центр приведения O совпадает с центром тяжести ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), так и в том случае, когда точка O тела закреплена в пространстве ($u = v = w = 0$). Как в том, так и в другом случае равенства (30′) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} K_x &= Ap - C'q - B'r, \\ K_y &= -C'p + Bq - A'r, \\ K_z &= -B'p - A'q + Cr; \end{aligned}\right\} \tag{30''}$$

достаточно принять за подвижные оси три главные оси инерции относительно точки O (центр тяжести или закрепленная точка, неизменно связанная с телом), чтобы привести, наконец, проекции момента количеств движения к канонической форме:

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cr, \tag{30'''}$$

где A, B, C обозначают главные моменты инерции.

Формулы (30‴) и (29″) будут справедливы всякий раз, когда центр приведения совпадает с центром тяжести, но не в том случае, когда точка O будет закреплена в пространстве, так как тогда наряду с формулами (30‴) для составляющих $\boldsymbol{Q}$ получатся выражения

$$Q_x = z_0 q - x_0 r, \quad Q_y = x_0 r - z_0 p, \quad Q_z = y_{0p} - x_0 q. \qquad (29''')$$

Важно отметить, что в этом последнем предположении (центр приведения закреплен) живая сила может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K},$$

тогда как в том случае, когда центр приведения совпадает с центром тяжести, это выражение даст живую силу T'' твердого тела, движущегося относительно своего центра тяжести.

17. Твердое тело гироскопической структуры относительно какой-либо его точки и гироскопы. В динамике твердых тел мы часто будем иметь случай обращаться к таким телам, для которых существует некоторая точка O, относительно которой эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения. Всякое такое твердое тело мы будем называть телом с *гироскопической структурой* относительно точки O, а ось симметрии соответствующего эллипсоида инерции будет называться *гироскопической осью.*

Если такое твердое тело отнесем к системе $Oxyz$, ось z которой совпадает с гироскопической осью, и обозначим, как обычно, через A, B, C (главные) моменты инерции твердого тела относительно осей x, y, z, то характеристическое условие гироскопической структуры определится равенством

$$A = B; \qquad (31)$$

отсюда, если введем моменты инерции относительно трех (главных) плоскостей:

$$yz, \; zx, \; xy,$$

т. е. суммы

$$s_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2, \quad s_3 = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i^2,$$

следует, что

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2}C, \quad s_3 = A - \frac{1}{2}C.$$

Предположим теперь, в частности, что точка O, относительно которой твердое тело имеет гироскопическую структуру, совпадает с его центром тяжести. Если на гироскопической оси z возьмем какую-нибудь другую точку O_1, для которой будет $OO_1 = z_0$, и рассмотрим систему $O_1x_1y_1z$, в которой оси x_1, y_1 параллельны и одинаково направлены с осями x, y, то моменты инерции A_1, B_1,

C_1 твердого тела относительно новых осей в силу теоремы Гюйгенса (т. I, гл. X, п. 21) определятся равенствами

$$A_1 = A + mz_0^2, \quad B_1 = B + mz_0^2, \quad C_1 = C,$$

где m обозначает полную массу тела, так что мы будем иметь

$$A_1 = B_1. \tag{31'}$$

С другой стороны, если мы примем во внимание, что точка O есть центр тяжести, и, следовательно, статические моменты

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

твердого тела относительно плоскостей yz, zx, xy равны нулю, то немедленно убедимся в том, что будут также равны нулю вместе с произведениями инерции A', B', C' относительно осей x, y, z аналогичные произведения A_1', B_1', C_1' *) относительно осей x_1, y_1, z_1. Таким образом, мы видим, что x_1, y_1, z суть главные оси инерции твердого тела, которое на основании равенства (31') имеет поэтому гироскопическую структуру не только относительно центра тяжести, но также и относительно всякой другой точки O_1 его оси.

Иначе говоря, если центральный эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то эллипсоиды инерции относительно всякой другой точки на его оси симметрии будут также эллипсоидами вращения.

И наоборот, достаточно, чтобы твердое тело имело гироскопическую структуру относительно какой-нибудь точки и чтобы ось симметрии соответствующего эллипсоида инерции проходила через центр тяжести, для того чтобы и центральный эллипсоид был эллипсоидом вращения.

Всякое тело, центральный эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения, мы будем называть *гироскопом*.

Гироскопом, конечно, будет однородное тело вращения или вообще твердое тело, представляющее полную симметрию относительно некоторой оси, не только геометрическую, но и материальную. Ради краткости мы будем говорить в этих случаях, что речь идет о „гироскопах в узком смысле".

Вернемся к предположению, что твердое тело имеет гироскопическую структуру относительно одной своей точки O. Если эта

*) Действительно, эти величины представятся в виде

$$A_1' = \sum m_i y_i (z_i - z_0) = \sum m_i y_i z_i - z_0 \sum m_i y_i = A' = 0,$$

$$B_1' = \sum m_i (z_i - z_0) x_i = \sum m_i z_i x_i - z_0 \sum m_i x_i = B' = 0,$$

$$C_1' = C' = 0,$$

так как статические моменты $\sum m_i y_i$ и $\sum m_i x_i$, как только что было сказано, равны нулю. (*Прим. ред.*)

точка неподвижна (или совпадает с центром тяжести), то уравнения (30') на основании условия $A=B$ приведутся к следующим:

$$K_x = Ap, \quad K_y = Aq, \quad K_z = Cr,$$

так что если обозначим через $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{H}$ экваториальные составляющие векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, т. е. их составляющие в плоскости, перпендикулярной к гироскопической оси, то эти формулы можно будет заменить двумя равенствами (первое из которых векторное, второе — скалярное):

$$\boldsymbol{H} = A\boldsymbol{e}, \quad K_z = Cr.$$

Далее, если обозначим через $\boldsymbol{k}$ единичный вектор гироскопической оси z (направленной в сторону, которая выбирается произвольно при выборе осей $Oxyz$), то для векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ будем иметь выражения

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e} + r\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{K} = A\boldsymbol{e} + Cr\boldsymbol{k},$$

а отсюда, после исключения экваториальной составляющей $\boldsymbol{e}$ вектора $\boldsymbol{\omega}$, получатся два эквивалентных друг другу равенства, каждое из которых выражает один из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ в функции от другого (и единичного вектора $\boldsymbol{k}$ гироскопической оси):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{A}\boldsymbol{K} + \frac{A-C}{A} r\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{K} = A\boldsymbol{\omega} + (C-A) r\boldsymbol{k}.$$

Полученными выше формулами для какого угодно твердого тела гироскопической структуры мы будем неоднократно пользоваться в динамике твердого тела (гл. VII, VIII, IX). Важно отметить, что на основании того обстоятельства, что *всякая* пара взаимно перпендикулярных прямых, расположенных в экваториальной плоскости, вместе с гироскопической осью составляет тройку главных осей инерции, все эти формулы останутся в силе даже тогда, когда вместо осей $Oxyz$, неизменно связанных с твердым телом, будут выбраны оси Ox_1y_1z, вращающиеся по какому-нибудь закону вокруг гироскопической оси z (стереокинетическая система отсчета для тела с гироскопической структурой).

18. Геометрическое соответствие между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$. Обращаясь теперь к какому угодно твердому телу, отнесенному к одной из троек главных осей инерции $Oxyz$, возьмем снова скалярное произведение

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{32}$$

которое, как мы знаем, дает живую силу твердого тела в его абсолютном движении или в его движении относительно центра тяжести, смотря по тому, будет ли центр O приведения моментов количеств движения закрепленной точкой (неизменно связанной с твердым телом), или центром тяжести твердого тела (п. 16). Обозначая эту живую силу в обоих случаях через T (в п. 9 во втором случае мы ее обозначали через T'') и принимая во внимание, что она по отношению к величинам p, q, r является определенной положительной формой, заключаем, что (кроме возможных моментов, когда исчезает $\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, в силу формул (30″), исчезает также и $\boldsymbol{K}$) *угол между двумя векторами* $\boldsymbol{\omega}$ *и* $\boldsymbol{K}$ *будет всегда острым.* Но наряду с этим чисто качественным результатом легко можно найти геометрическое построение, позволяющее определить направление одного из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, когда известно направление другого.

С этой целью рассмотрим эллипсоид инерции твердого тела относительно точки O и заметим, что в соответствующем уравнении (отнесенном к главным осям инерции)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \tag{33}$$

левая часть даст удвоенную живую силу $2T$, если вместо величин x, y, z подставить величины p, q, r.

Если величины p, q, r рассматривать как однородные координаты (пропорциональные направляющим косинусам) прямой, параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$, и принять во внимание полярные свойства эллипсоида инерции, то из соотношений (30)

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad K_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad K_z = \frac{\partial T}{\partial r}$$

будет видно, что проекции вектора $\boldsymbol{K}$ на оси x, y, z являются коэффициентами при x, y, z в уравнении диаметральной плоскости, сопряженной с направлением $\boldsymbol{\omega}$, или, другими словами, угловыми коэффициентами (пропорциональными направляющим косинусам) нормали к этой плоскости.

Поэтому можно сказать, что кинетический ***момент К всегда перпендикулярен к диаметральной плоскости эллипсоида инерции, сопряженной с направлением угловой скорости*** $\boldsymbol{\omega}$.

Если вспомним, что касательная плоскость к эллипсоиду (так же как и к какой угодно поверхности второго порядка) в любой точке сопряжена с диаметром, проходящим через точку касания, то можно сказать также, что ***момент К перпендикулярен к двум касательным плоскостям*** (друг другу параллельным) ***к эллипсоиду инерции в двух точках, в которых эллипсоид пересекается с диаметром, параллельным вектору*** $\boldsymbol{\omega}$.

Отсюда, в частности, следует, что векторы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ будут параллельны тогда и только тогда, когда оба они имеют направление одной из главных осей или, в другом выражении, когда мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ происходит вокруг одной из главных осей инерции.

Установленное выше геометрическое свойство и качественная оценка, произведенная вначале, позволяют всегда определить направление и сторону какого-нибудь одного из двух векторов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$, если известны направление и сторона другого. Для того чтобы иметь линию действия (ориентированную) вектора $\boldsymbol{K}$, достаточно рассмотреть касательную плоскость к эллипсоиду инерции в какой-нибудь одной из двух точек, в которых он пересекается линией действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ (приложенного в точке O) и провести из точки O перпендикуляр к этой плоскости в ту сторону, которая с $\boldsymbol{\omega}$ образует острый угол. И обратно, мы получим линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$, если возьмем какую-нибудь одну из касательных плоскостей к эллипсоиду, перпендикулярных к вектору $\boldsymbol{K}$, и направим прямую, соединяющую O с точкой касания в ту сторону, которая составляет с $\boldsymbol{K}$ острый угол.

Остается показать, что когда известна величина ω угловой скорости, можно вычислить величину K кинетического момента и обратно.

Если задана угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а следовательно, также и живая сила T, и требуется вычислить K, то достаточно обратиться к формуле (32), чтобы получить

$$K\omega\cos\alpha = 2T, \tag{32'}$$

где острый угол α считается известным на основании изложенных выше геометрических соображений.

Далее, если, предполагая известным $\boldsymbol{K}$, мы желаем найти величину ω угловой скорости, то можно прежде всего определить путем геометрического построения (ориентированную) линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, величину α (острого) угла между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$. Если, обозначая через Q точку, в которой эта линия действия в своем положительном направлении пересекает эллипсоид инерции, мы положим $\rho = OQ$ и примем во внимание, что направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{\omega}$ определяются отношениями $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$, то для координат точки Q получим выражения

$$\rho\frac{p}{\omega},\quad \rho\frac{q}{\omega},\quad \rho\frac{r}{\omega},$$

а отсюда, учитывая, что эти величины удовлетворяют уравнению (33) эллипсоида инерции, придем к соотношению

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = 2T. \tag{34}$$

Исключив из равенств (32') и (34) живую силу T, получим искомое выражение для ω:

$$\omega = K\rho^2\cos\alpha.$$

Здесь, наконец, имея в виду будущие приложения, полезно также вычислить расстояние δ от центра O эллипсоида до его касательной плоскости в точке Q. Очевидно, имеем

$$\delta = \rho \cos \alpha; \tag{35}$$

исключая ρ посредством равенства (34) и принимая во внимание равенство (32′), получим

$$\delta = \frac{\sqrt{2T}}{K}. \tag{36}$$

19. Векторная гомография инерции. Соответствие между двумя векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, которое мы только что изучали с геометрической точки зрения и которое по отношению к любым подвижным осям аналитически представляется равенствами (30″), а по отношению к главным осям инерции относительно точки O — равенствами (30‴), является первым примером тех взаимно однозначных соответствий между (переменными) векторами, которые по отношению к какой-нибудь системе отсчета устанавливаются путем определения составляющих одного из двух векторов в виде линейных функций от составляющих другого. Это так называемые *векторные гомографии (или аффинные преобразования)*; это название дал им Бурали-Форти, а Марколонго в последние годы развил их теорию[1]).

Векторные гомографии мы рассмотрим несколько подробнее в III томе, но уже теперь для удобства изложения условимся называть рассматриваемое здесь соответствие между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ *(векторной) гомографией инерции* твердого тела *относительно его точки* O, выбранной за центр приведения. Векторную гомографию инерции, если рассматривать ее как однозначную операцию, которая, будучи приложена к вектору $\boldsymbol{\omega}$, даст в результате вектор $\boldsymbol{K}$, удобно выразить символом σ, полагая

$$\boldsymbol{K} = \sigma(\boldsymbol{\omega}).$$

Обратная операция, которая, будучи приложена к вектору $\boldsymbol{K}$, дает вектор $\boldsymbol{\omega}$, так же как и операция σ, однозначна, как мы видели в предыдущем пункте, и может быть выражена символом σ^{-1}, именно

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma^{-1}(\boldsymbol{K}).$$

Оба предыдущих символических уравнения выражают в краткой форме, с одной стороны, уравнения (30″), относящиеся к любым подвижным осям, связанным с твердым телом, и уравнения, получающиеся в результате их решения, а с другой стороны, уравнения (30‴), относящиеся к главным осям инерции в точке O, и соответственно уравнения, представляющие собой решения уравнений (30‴).

[1]) См., в частности, Burali—Forti e Marcolongo, *Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

Уравнения (30''') вместе с их решениями

$$p=\frac{K_x}{A},\quad q=\frac{K_y}{B},\quad r=\frac{K_z}{C}$$

называются *каноническими уравнениями* гомографии; направления главных осей инерции, к которым относятся эти уравнения, называются иногда *главными направлениями гомографии*.

20. Твердое тело, имеющее неподвижную ось. Если твердое тело S вращается вокруг неподвижной прямой a, то удобно принять эту прямую, ориентированную как угодно, за одну из подвижных осей отсчета, например за ось x, и взять в одной из ее точек центр приведения O моментов; эту точку можно затем принять за начало подвижных осей. Благодаря этому обратятся в нуль все величины, характеризующие кинематическое состояние тела, за исключением p $(u=v=w=q=r=0,\ p\neq 0)$, а так как при неподвижном центре приведения O уравнения (29'''), (30'') п. 16 сохраняют свое значение, то для проекций количества движения $\boldsymbol{Q}$ и момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ будем иметь выражения:

$$Q_x=0,\qquad Q_y=-z_0p,\qquad Q_z=y_0p;\tag{37}$$

$$K_x=Ap,\qquad K_y=-C'p,\qquad K_z=-B'p.\tag{38}$$

С точки зрения основной задачи динамики (определить движение, когда заданы активные силы) наиболее важным из этих шести элементов (как это мы увидим в гл. VII) является момент $K_a=K_x$ количеств движения относительно оси вращения. Обозначая, как обычно, через ω абсолютную величину угловой скорости, имеем $p=\pm\omega$, причем знак выбирается в зависимости от того, будет ли (в рассматриваемый момент) произвольно выбранное за положительное направление оси совпадать или не совпадать с направлением угловой скорости *).

Первое из уравнений (38) показывает, таким образом, что *момент количеств движения относительно оси вращения выражается произведением* $\pm\omega$ *на* A (момент инерции тела относительно той же оси), где нужно взять знак плюс, если ось вращения ориентирована таким образом, что в рассматриваемый момент вращение твердого тела по отношению к ней оказывается правым.

Не лишним будет показать, как к этому выражению K_a можно прийти элементарным путем.

Действительно, заметим, что если речь идет о вращательном движении вокруг оси a, то скорость точки P_i, расстояние которой от оси есть δ_i, имеет величину $\omega\delta_i$ и направлена перпендикулярно к плоскости P_ia; так как δ_i есть кратчайшее расстояние линии

*) Если под ω подразумевают не модуль вектора ω, а его проекцию на ось, то необходимость постановки двойного знака отпадает. *(Прим. ред.)*

действия скорости от оси, то момент этой скорости относительно оси будет равен $\omega\delta_i^2$, причем не только по абсолютной величине, но и по знаку, если ось ориентирована в ту сторону, с какой вращение в рассматриваемый момент оказывается правым. В силу этого момент относительно оси a количества движения материальной точки P_i при указанном выборе направления оси равен $m_i\omega\delta_i^2$; суммируя по всем точкам системы, найдем снова формулу

$$K_a = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2,$$

которая совпадает с ранее полученной, так как $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2$ есть момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Если направление этой оси меняется на обратное, то в правой части, естественно, надо будет изменить знак.

Если через θ обозначить угол, который полуплоскость, выходящая из a и неизменно связанная с телом, образует с аналогичной полуплоскостью, неподвижной в пространстве (этот угол будем считать положительным при правом вращении вокруг a), то можно будет написать

$$K_a = A\dot{\theta},$$

так как, согласно определению угловой скорости ω, $\dot{\theta}$ есть ее проекция на ось a (т. I, гл. III, п. 8).

§ 4. Система отсчета для какой угодно материальной системы, соответствующая наименьшей кинетической энергии

21. Относительный характер живой силы, уже отмеченный в п. 6, приводит к рассмотрению некоторого особого класса систем отсчета для любой материальной системы.

Предположим, что движение некоторой системы S определено относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$, которые для простоты назовем неподвижными, и поставим себе задачу определить такую систему отсчета, относительно которой живая сила системы будет наименьшей.

Заметим теперь же, что если некоторый триэдр обладает этим свойством, то то же будет иметь место и для всякого другого триэдра, неподвижного относительно первого, так что все сводится к выяснению того, каким должно быть движение искомой системы отсчета $Oxyz$ относительно неподвижной системы $\Omega\xi\eta\zeta$. Для этой цели достаточно указать характеристические векторы $\boldsymbol{v}_0 = d_aO/dt$ и $\boldsymbol{\omega}$ движения осей $Oxyz$, где d_a/dt обозначает (абсолютную) производную, относящуюся к осям $\Omega\xi\eta\zeta$.