действия скорости от оси, то момент этой скорости относительно оси будет равен $\omega\delta_i^2$, причем не только по абсолютной величине, но и по знаку, если ось ориентирована в ту сторону, с какой вращение в рассматриваемый момент оказывается правым. В силу этого момент относительно оси a количества движения материальной точки P_i при указанном выборе направления оси равен $m_i\omega\delta_i^2$; суммируя по всем точкам системы, найдем снова формулу

$$K_a = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2,$$

которая совпадает с ранее полученной, так как $\sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2$ есть момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Если направление этой оси меняется на обратное, то в правой части, естественно, надо будет изменить знак.

Если через θ обозначить угол, который полуплоскость, выходящая из a и неизменно связанная с телом, образует с аналогичной полуплоскостью, неподвижной в пространстве (этот угол будем считать положительным при правом вращении вокруг a), то можно будет написать

$$K_a = A\dot{\theta},$$

так как, согласно определению угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\theta}$ есть ее проекция на ось a (т. I, гл. III, п. 8).

§ 4. Система отсчета для какой угодно материальной системы, соответствующая наименьшей кинетической энергии

21. Относительный характер живой силы, уже отмеченный в п. 6, приводит к рассмотрению некоторого особого класса систем отсчета для любой материальной системы.

Предположим, что движение некоторой системы S определено относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$, которые для простоты назовем неподвижными, и поставим себе задачу определить такую систему отсчета, относительно которой живая сила системы будет наименьшей.

Заметим теперь же, что если некоторый триэдр обладает этим свойством, то то же будет иметь место и для всякого другого триэдра, неподвижного относительно первого, так что все сводится к выяснению того, каким должно быть движение искомой системы отсчета $Oxyz$ относительно неподвижной системы $\Omega\xi\eta\zeta$. Для этой цели достаточно указать характеристические векторы $\boldsymbol{v}_0 = d_aO/dt$ и $\boldsymbol{\omega}$ движения осей $Oxyz$, где d_a/dt обозначает (абсолютную) производную, относящуюся к осям $\Omega\xi\eta\zeta$.

Теорема Кёнига позволяет непосредственно заключить, что должно быть

$$\frac{d_a O}{dt}=\frac{d_a G}{dt},$$

где G, как обычно, обозначает центр тяжести системы. Действительно, в силу этой теоремы живая сила системы S относительно системы осей $Oxyz$ состоит из живой силы относительно центра тяжести, увеличенной на *существенно положительное слагаемое*

$$\frac{1}{2}m\left[\frac{d_a\overrightarrow{OG}}{dt}\right]^2,$$

где m обозначает полную массу системы S, так что искомая система отсчета должна иметь начало O неподвижным относительно центра тяжести G, или, несколько точнее, относительно системы $G\xi\eta\zeta$ с началом в G и с неизменными направлениями осей.

Условимся называть *абсолютными* кинематические величины, которые относятся к этим последним осям, и *относительными* кинематические величины, относящиеся к неизвестной системе осей, обладающей указанным выше свойством.

Относительную скорость какой-нибудь точки $P_i\,(i=1,\,2,\,\ldots,\,N)$ системы можно представить в виде $\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i$, где $\boldsymbol{v}_i$ есть аналогичная абсолютная скорость, которую мы можем считать известной, а

$$\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{GP_i}\quad(i=1,\,2,\,\ldots,\,N)\qquad(39)$$

есть соответствующая переносная скорость. Отсюда для относительной живой силы находим выражение

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i)^2.$$

Далее, из анализа известно, что для того, чтобы T, рассматриваемая как функция угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (или соответствующих абсолютных ее составляющих π, χ, ρ), имела минимум при данном значении $\boldsymbol{\omega}$, необходимо, чтобы при любом бесконечно малом приращении $\delta\boldsymbol{\omega}$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ исчезала соответствующая вариация T.

Так как T зависит от $\boldsymbol{\omega}$ только через посредство $\boldsymbol{w}_i$, то эта вариация определяется равенством

$$\delta T=-\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i)\cdot\delta\boldsymbol{w}_i,$$

где в силу соотношения (39)

$$\delta\boldsymbol{w}_i=\delta\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{GP_i}\qquad(i=1,\,2,\ldots,\,N);$$

поэтому, подставляя эти выражения вместо $\delta\boldsymbol{w}_i$ и переставляя множители смешанного произведения, получим

$$\delta T = -\delta\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP} \times m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i).$$

Полученная вариация δT будет равна нулю при любом значении $\delta\boldsymbol{\omega}$ в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP_i} \times m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i) = 0. \tag{40}$$

Отсюда заключаем, *что искомая система осей должна быть такой, чтобы в движении по отношению к ней кинетический момент материальной системы относительно центра тяжести был равен нулю*[1]).

Следует заметить, что равенство (40) в силу соотношения (39) приводит к трем линейным уравнениям относительно трех неизвестных проекций π, χ, ρ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, которые определяются из этих уравнений однозначно. Это можно видеть и не производя вычислений, если мысленно спроектировать уравнение (40) на главные оси инерции $G\xi\eta\zeta$, проходящие через центр тяжести.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что если в любой момент движение твердого тела является винтовым, то элементарная работа центробежных сил (отнесенных к мгновенной винтовой оси) равна нулю.

2. Диск произвольного вида (т. е. ограниченный произвольной кривой) движется в своей плоскости, катясь без скольжения по прямой l. Пусть ω есть угловая скорость диска в любой момент и v — абсолютная величина скорости центра тяжести G. Показать, что, обозначая через ρ расстояние от центра тяжести G диска до точки P касания диска с прямой l и через δ радиус инерции диска относительно оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр тяжести, будем иметь

$$v^2 = \frac{\rho^2}{\delta^2 + \rho^2}\,\omega^2.$$

Достаточно приравнять два выражения, которые получатся для живой силы диска, когда за центр приведения берется точка касания или центр тяжести.

---

[1]) В случае твердого тела это будет иметь место для всякой системы осей, неизменно связанной с телом. Аппелль, пытаясь распространить некоторые свойства, которыми обладают системы осей, неизменно связанные с твердым телом, на какие угодно системы осей, был вынужден исходить из условия (40), выражающего обращение в нуль кинетического момента относительно центра тяжести в относительном движении (*Comptes Rendus*, т. 166, 1918, стр. 513—516). Вывод условия (40), приведенный в тексте, был сообщен авторам устно Альманси.