поэтому, подставляя эти выражения вместо $\delta \boldsymbol{w}_i$ и переставляя множители смешанного произведения, получим

$$\delta T = -\delta\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP} \times m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i).$$

Полученная вариация $\delta T$ будет равна нулю при любом значении $\delta\boldsymbol{\omega}$ в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP_i} \times m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i) = 0. \tag{40}$$

Отсюда заключаем, *что искомая система осей должна быть такой, чтобы в движении по отношению к ней кинетический момент материальной системы относительно центра тяжести был равен нулю* [1]).

Следует заметить, что равенство (40) в силу соотношения (39) приводит к трем линейным уравнениям относительно трех неизвестных проекций $\pi$, $\chi$, $\rho$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, которые определяются из этих уравнений однозначно. Это можно видеть и не производя вычислений, если мысленно спроектировать уравнение (40) на главные оси инерции $G\xi\eta\zeta$, проходящие через центр тяжести.

## *УПРАЖНЕНИЯ*

**1.** Показать, что если в любой момент движение твердого тела является винтовым, то элементарная работа центробежных сил (отнесенных к мгновенной винтовой оси) равна нулю.

**2.** Диск произвольного вида (т. е. ограниченный произвольной кривой) движется в своей плоскости, катясь без скольжения по прямой $l$. Пусть $\omega$ есть угловая скорость диска в любой момент и $v$ — абсолютная величина скорости центра тяжести $G$. Показать, что, обозначая через $\rho$ расстояние от центра тяжести $G$ диска до точки $P$ касания диска с прямой $l$ и через $\delta$ радиус инерции диска относительно оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр тяжести, будем иметь

$$v^2 = \frac{\rho^2}{\delta^2 + \rho^2} \omega^2.$$

Достаточно приравнять два выражения, которые получатся для живой силы диска, когда за центр приведения берется точка касания или центр тяжести.

---

[1]) В случае твердого тела это будет иметь место для всякой системы осей, неизменно связанной с телом. Аппелль, пытаясь распространить некоторые свойства, которыми обладают системы осей, неизменно связанные с твердым телом, на какие угодно системы осей, был вынужден исходить из условия (40), выражающего обращение в нуль кинетического момента относительно центра тяжести в относительном движении (*Comptes Rendus*, т. 166, 1918, стр. 513—516). Вывод условия (40), приведенный в тексте, был сообщен авторам устно Альманси.

3. Определить структурные условия, при которых твердое тело, закрепленное в его точке $O$, при движении около этой точки имеет живую силу, пропорциональную квадрату угловой скорости.

Прежде всего заметим, что кинетическое условие того, что отношение $T/\omega^2$ не должно зависеть от величины угловой скорости и направления мгновенной оси тела, означает, что эллипсоид инерции относительно точки $O$ сводится к шару. Таким образом, мы прямо переходим к вопросу чистой геометрии масс. Для того чтобы существовала такая точка, необходимо и достаточно, чтобы центральный эллипсоид инерции был сплюснутым эллипсоидом вращения. В этом случае существуют две точки $O$, обе лежащие на оси симметрии эллипсоида на расстоянии $c$ от центра тяжести, связанном с полной массой $m$ и с главными моментами инерции (экваториальным и полярным) $A$ и $C$ соотношением

$$A + mc^2 = C.$$

4. Показать, что всякое твердое тело с двумя плоскостями симметрии есть гироскоп.

5. Когда мгновенная винтовая ось и центральная ось $q$ количеств движения совпадают?

Эти оси соответственно параллельны (при обозначениях пп. 9 и 10) векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G$, так что прежде всего вектор $\boldsymbol{v}_G$ должен быть параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$. Это показывает, что при допущенном предположении мгновенная винтовая ось и, следовательно, центральная ось $q$ проходят через центр тяжести $G$. После этого необходимо и достаточно, чтобы результирующий момент $\boldsymbol{K}$ количеств движения относительно центра тяжести $G$, взятого за центр приведения, был параллелен вектору $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, вектору $\boldsymbol{\omega}$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы три главных центральных момента инерции были равны между собой.

6. Три материальные точки: $P$, $P_1$, $P_2$ с массами $m$, $m_1$, $m_2$ движутся по плоскости; точки $P_1$ и $P_2$ связаны с точкой $P$ двумя твердыми стержнями, могущими свободно вращаться вокруг $P$, длиной $l_1$, $l_2$. Мы имеем здесь, очевидно, голономную систему с четырьмя степенями свободы. Определить живую силу системы $T$, пренебрегая массой стержней и принимая за параметры Лагранжа координаты $x$, $y$ точки $P$ относительно какой-нибудь декартовой системы $Oxy$ в плоскости движения и углы $\theta_1$, $\theta_2$, образованные прямыми $PP_1$ и $PP_2$ с осью $Ox$.

*Ответ:*

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sum_{i=1}^{2} m_i \{(\dot{x} - l_i \sin\theta_i \dot{\theta}_i)^2 + (\dot{y} + l_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i)^2\}.$$

7. Если характеристикам $u$, $v$, $w$, $p$, $q$, $r$ состояния движения твердого тела придадим бесконечно малые приращения $\delta u$, $\delta v$, ..., $\delta r$, то живая сила $T$ получит приращение, которое по теореме о полном дифференциале определится равенством

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial u}\delta u + \frac{\partial T}{\partial v}\delta v + \frac{\partial T}{\partial w}\delta w + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r.$$

С другой стороны, обозначив через $\delta\boldsymbol{v}_0$ и $\delta\boldsymbol{\omega}$ соответствующие приращения двух характеристических векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$, для скорости любой точки $P_i$ твердого тела будем иметь

$$\delta\boldsymbol{v}_i = \delta\boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

После этого, отправляясь от выражения

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

и принимая во внимание определение векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$, вычислить выражение приращения $\delta T$. Сравнение с предыдущим приведет к формулам (29), (30) п. 15.

**8.** Рассматривая квадратичную форму $T$, выражающую живую силу твердого тела через характеристики $u, v, w, p, q, r$, обозначим через $(T)$ взаимную форму, т. е. квадратичную форму, получающуюся из $T$, если вместо шести указанных выше аргументов вводятся шесть их линейных комбинаций:

$$Q_x=\frac{\partial T}{\partial u},\quad Q_y=\frac{\partial T}{\partial v},\quad Q_z=\frac{\partial T}{\partial w},\quad K_x=\frac{\partial T}{\partial p},\quad K_y=\frac{\partial T}{\partial q},\quad K_z=\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Предполагается, что эти линейные комбинации независимы. Проверить прежде всего, что это условие достаточно и что поэтому произвольным приращениям $\delta u$, $\delta v$, ..., соответствуют вполне определенные приращения $\delta Q_x$, $\delta Q_y$, ..., $\delta K_z$, и обратно. По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$2T=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega}.$$

Отсюда и из соотношения $\delta(T)=\delta T$ получим

$$\delta(T)=\boldsymbol{v}_0\cdot\delta\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{\omega}\cdot\delta\boldsymbol{K},$$

а также выражения для кинетических характеристик $u, v, \ldots r$, которые являются производными от $(T)$.