Глава V

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Общие сведения

1. Основной задачей динамики является *определение движения какой угодно материальной системы при заданных действующих силах.*

Для уточнения самой формулировки этой задачи необходимы некоторые предварительные сведения. Будем при этом пользоваться аналогией со случаем одной материальной точки, пока это не вызовет противоречий.

Если, как обычно, обратимся к системе S из N материальных точек P_i ($i=1, 2, \ldots, N$), то всякая система действующих сил будет состоять из сил, приложенных к N точкам системы. Эту систему сил на основании постулата о независимости действия сил (т. I, гл. VII, п. 12) можно свести к N силам, приложенным соответственно к N точкам P_i, заменяя для каждой из них все различные действующие на нее силы их равнодействующей. Имея это в виду, мы будем считать известной систему сил, действующих на материальную систему, всякий раз, как для каждой точки P_i будет задана равнодействующая приложенных к ней сил в функции от конфигурации системы, от скоростей всех N точек в данный момент и от времени (ср. т. I, гл. VII, п. 22).

Если, как в задаче небесной механики для N тел (гл. III, п. 22), эти N точек P_i свободны и задана, в только что указанном смысле, система действующих на них сил, то задачу о движении тотчас же можно будет выразить в уравнениях.

Действительно, применяя к каждой из N точек основное уравнение динамики, мы получим N векторных уравнений

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}_i$ обозначает заданную равнодействующую всех сил, приложенных к точке P_i, m_i — массу этой точки и $\boldsymbol{a}_i$ — ее неизвестное ускорение, отнесенное к галилеевой системе отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. е. к системе, которая относительно звезд неподвижна или движется поступательно и притом прямолинейно и равномерно). Если ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты точки P_i и X_i, Y_i, Z_i — составляющие силы $\boldsymbol{F}_i$ в этой системе, то векторные уравнения (1), если их спроектировать на три оси $\Omega\xi\eta\zeta$, дадут $3N$ скалярных уравнений:

$$m_i \ddot{\xi}_i = X_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = Z_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{1'}$$

где X_i, Y_i, Z_i по предположению обозначают некоторые известные функции от $6N+1$ аргументов

$$\xi_i,\quad \eta_i,\quad \zeta_i;\quad \dot{\xi}_i,\quad \dot{\eta}_i,\quad \dot{\zeta}_i;\quad t \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Следовательно, речь идет о системе $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $3N$ неизвестными функциями ξ_i, η_i, ζ_i от одной независимой переменной t; задача о движении N свободных точек P_i при заданной системе сил приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (1').

Это интегрирование, как известно, вообще говоря, не может быть выполнено в конечном виде при помощи элементарных способов. Но на основании известных теорем о существовании [1]) можно утверждать, что при достаточно широких условиях для функций X_i, Y_i, Z_i система (1') имеет общий интеграл, зависящий от $6N$ произвольных постоянных.

Следовательно, можно сказать, что для N свободных точек P_i при заданных силах возможны ∞^{6N} различных движений; из них можно выделить одно, задавая соответствующие начальные условия, например задавая произвольно положение системы и ее кинематическое состояние в начальный момент.

2. Рассмотренный случай системы из N *свободных* точек встречается в физической действительности только в упомянутой выше задаче небесной механики (в которой система сил, как мы знаем, принадлежит не к общему виду, как предположено в предыдущем пункте, а представляет собой систему позиционных сил). В огромном же большинстве конкретных вопросов приходится рассматривать *материальные системы со связями*.

Далее, если система из N материальных точек P_i с какими угодно связями находится под действием системы сил, то, основываясь на постулате о реакциях связей (т. I, гл. VII, п. 10), мы можем принять, что действие, оказываемое связями при заданных силах на каждую точку системы, можно заменить некоторой силой, которую называют реакцией связи.

После этого, на основании только что упомянутого постулата, можно рассматривать систему S как систему, состоящую из N свободных точек, каждая из которых находится под совокупным действием равнодействующей прямо приложенных к ней сил и равнодействующей реакций, которыми заменяется действие связей.

Отсюда следует, что также и в более общем случае систем со связями остаются в силе основные уравнения (1) *при условии, что каждая из сил $\boldsymbol{F}_i$ рассматривается как равнодействующая*

[1]) Вспомним подстрочное примечание к п. 18 главы II первого тома русского издания.

активных сил и реакций, под действием которых находится соответствующая точка P_i.

Таким образом, между рассматриваемым случаем и случаем, который был разобран в предыдущем пункте, имеется существенное различие. Здесь, помимо активных сил, оказываются известными только способы реализации связей, но не соответствующие реакции, которые вследствие этого являются *вспомогательными неизвестными*. Эти неизвестные входят в виде явных слагаемых в правые части уравнений (1). Отсюда следует, что уравнения (1) в случае движения системы со связями представляют собой только предварительную постановку задачи; поэтому в динамике приходится отыскивать способы, которые позволили бы исключить из уравнений (1) в наиболее общих возможных случаях реакции и таким образом для определения движения дать дифференциальные уравнения, зависящие только от прямых данных рассматриваемой задачи.

3. В предыдущем пункте в силу логической необходимости нам пришлось разделить действующие на систему силы на *силы прямо приложенные*, или *активные*, и *силы связей*, или *реакции*.

Этой классификации можно противопоставить другую (которая была введена уже в статике и к которой мы возвращались в п. 3 предыдущей главы) классификацию этих же сил: разделение их на *внешние* и *внутренние*. Здесь, имея в виду важность такого различения сил, напомним, хотя это может показаться почти излишним, что *внутренними силами* называются силы, с которыми на каждую отдельную точку системы действуют другие точки той же системы (в частности, точки, соседние с ней), *внешними* же мы называли все остальные силы (происходящие от внешних влияний на систему).

Чтобы избежать опасной путаницы, мы тотчас же условимся, что эта вторая классификация сил не зависит от первой. Для некоторых частных систем, как, например, для свободного твердого тела, находящегося под действием силы тяжести и поверхностных растягивающих или сжимающих сил, обе классификации приводят к одному и тому же распределению сил; в этом случае активные силы (вес и поверхностные силы) являются внешними, а реакции (силы связей твердого тела) — внутренними. Но достаточно подумать о связях, осуществляемых посредством соединений системы с внешними по отношению к ней телами (например, подвешенное или опертое твердое тело), а с другой стороны, о силах, происходящих не от связей, но возбуждаемых искусственными приспособлениями или возникающих в естественных физических условиях (например, ньютонианское притяжение между материальными элементами движущейся системы), чтобы видеть, что, вообще говоря, *и активные силы, и силы реакции могут быть как внешними, так и внутренними.*

4. Две указанные выше классификации сил, действующих на материальную систему, играют важную роль в динамике, поскольку с каждой из них связывается целая группа общих теорем и последующих конкретных приложений. Не будет поэтому лишним вспомнить, что аналогичные обстоятельства имели место в статике, где сначала, разделив силы на внешние и внутренние, мы пришли к *основным условиям равновесия* (т. I, гл. XII), приложимым в качестве необходимых к всевозможным типам материальных систем (например, к стержневым системам, нитям и т. д., гл. XIV) и, в частности, являющимся достаточными для равновесия твердого тела (гл. XIII) затем в общей статике (гл. XV), отправляясь от разделения сил на активные силы и реакции и присоединяя ограничительные предположения о природе связей (отсутствие трения), мы пришли, применяя принцип виртуальной работы, к исключению неизвестных реакций из условий равновесия.

В настоящей главе мы будем придерживаться, применительно к вопросам динамики, того же порядка изложения. В § 2 на основании разделения сил, действующих на какую-нибудь систему, на внешние и внутренние мы установим два векторных уравнения *(основные уравнения движения)*, применяя которые к любой возможной системе мы придем к весьма разнообразным выводам и которые в случае твердого тела, как мы это увидим в гл. VII будут *достаточны* для определения движения.

В §§ 3—6, наоборот, мы будем исходить из деления сил на активные силы и реакции связей и покажем, в предположении отсутствия трения, как и в этом динамическом случае принцип виртуальной работы позволит исключить из дифференциальных уравнений движения в самом общем виде неизвестные реакции. Мы придем таким образом к классическим уравнениям Лагранжа (§ 6) и посредством ряда дополнительных выводов и конкретных примеров покажем их огромную важность как в теоретических вопросах, так и для приложений (§§ 7—9).

§ 2. Теоремы о количестве движения и о моменте количеств движения. Основные уравнения движения

5. Теорема о количестве движения. Рассматривая материальную систему S из N точек P_i ($i=1, 2, \ldots, N$) с произвольными связями, находящуюся под действием каких угодно сил, разобьем совокупность *всех* сил, действующих на систему (как прямо приложенных, так и реакций связей), на *внешние* и *внутренние* и обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую всех внешних сил, действующих на любую точку P_i, а через $\boldsymbol{f}_i$ — равнодействующую всех внутренних сил. Полная сила, действующая на точку P_i, будет равна $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i$, так что уравнения движения системы можно будет написать в виде

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N). \qquad (2)$$